

Série d'exercices — Chapitre 07

Polynômes

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1 — Reconnaître un polynôme★★★★★

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{R}^*$, ou sur $\mathbb{R}_+$ lorsque c'est nécessaire) par :

$$A(x) = 2x^4 - \sqrt{5}x + 1 ; \quad B(x) = x^2 + \frac{3}{x} ; \quad C(x) = (2 - x)^3 ;$$
$$D(x) = x^3 + |x| ; \quad E(x) = \pi x^2 - \frac{x}{2} ; \quad F(x) = x - \sqrt{x}.$$

Déterminer celles qui sont des polynômes, en précisant leur degré.

Exercice 2 — Égalité de polynômes★★★★★

On considère les polynômes $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$ et $Q(x) = (x + 1)(x - 2)(ax + b)$, où a et b sont des réels. Déterminer a et b pour que $P = Q$.

Exercice 3 — Racine et factorisation★★★★★

On considère le polynôme $P(x) = 3x^2 + 5x - 2$.

1) Vérifier que $\frac{1}{3}$ est une racine de P .

2) Déterminer le polynôme Q tel que $P(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right) Q(x)$.

3) En déduire l'autre racine de P .

Exercice 4 — Divisibilité★★★★★

On considère le polynôme $Q(x) = x^3 - 4x + 3$.

1) Calculer $Q(1)$. Le polynôme Q est-il divisible par $x - 1$?

2) Déterminer le polynôme R tel que $Q(x) = (x - 1)R(x)$.

Exercice 5 — Divisibilité★★★★★

1) Montrer que P est divisible par $x - a$ dans chacun des cas suivants :

a) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ et $a = 2$.

b) $P(x) = x^4 + x^3 - 3x - 3$ et $a = -1$.

c) $P(x) = x^3 - 7x + 6$ et $a = -3$.

2) On considère le polynôme $P(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + bx - 6$, où a et b sont des réels. Déterminer a et b pour que P soit divisible par $x - 1$ et par $x + 2$.

Exercice 6 — Division euclidienne, Horner★★★★★

1) Déterminer, par identification, le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$ dans chacun des cas :

a) $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$ et $a = -2$.

b) $P(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 1$ et $a = \frac{1}{2}$.

c) $P(x) = x^3 - 5x + 1$ et $a = 2$.

2) À l'aide de la méthode de Horner, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$ dans chacun des cas :

a) $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + x - 5$ et $a = 2$.

b) $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 10$ et $a = -2$.

c) $P(x) = 2x^4 + x^3 - 3x + 7$ et $a = -1$.

Exercice 7 — *Polynôme à paramètre*

★★★★★

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 + (m - 5)x + 3$, où m est un réel.

- 1) Déterminer m pour que -1 soit une racine de P .
- 2) Déterminer m pour que P soit divisible par $x - 1$.
- 3) On suppose que $m = 2$.
 - a) Déterminer le polynôme Q tel que $P(x) = (x - 1)Q(x)$.
 - b) Vérifier que $\sqrt{3}$ est une racine de Q , puis factoriser $P(x)$.

Exercice 8 — *Factorisation*

★★★★★

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$.

- 1) Montrer que -3 est une racine de P .
- 2) Déterminer le polynôme Q tel que $P(x) = (x + 3)Q(x)$.
- 3) Montrer que Q est divisible par $x - 2$.
- 4) Factoriser $Q(x)$.
- 5) En déduire une factorisation de $P(x)$ en produit de trois binômes.

Exercice 9 — *Polynôme symétrique*

★★★★★

On considère le polynôme $P(x) = 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$.

- 1) Montrer que 0 n'est pas une racine de P .
- 2) Montrer que, pour tout réel non nul α : $P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{P(\alpha)}{\alpha^4}$. En déduire que, si α est une racine de P , alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi une racine de P .
- 3) a) Montrer que 2 est une racine de P .
 b) Déterminer le polynôme Q tel que $P(x) = (x - 2)Q(x)$.
 c) En déduire que $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
- 4) a) Déterminer, par deux méthodes, les réels a , b et c tels que $Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c)$.
 b) En déduire une factorisation de $P(x)$ en produit de quatre binômes.

Exercice 10 — *Sommes télescopiques*

★★★★★

On considère un polynôme P et un entier naturel non nul n .

- 1) Vérifier que $(P(2) - P(1)) + (P(3) - P(2)) + \dots + (P(n+1) - P(n)) = P(n+1) - P(1)$.
- 2) a) Déterminer le polynôme Q de degré 2 tel que $Q(0) = 0$ et, pour tout réel x , $Q(x+1) - Q(x) = x$.
 b) En déduire que $1 + 2 + \dots + n = Q(n+1) - Q(1) = \frac{n(n+1)}{2}$.
 c) En déduire la valeur de $1 + 2 + \dots + 100$.

Exercice 11 — *Exercice d'approfondissement*

★★★★★

On admet que, si un polynôme P de degré 3 et de coefficient dominant 1 admet trois racines distinctes α , β et γ , alors $P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ pour tout réel x .

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, dont on admet qu'il a trois racines distinctes α , β , γ . Sans calculer ces racines, montrer que $\alpha + \beta + \gamma = 6$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 11$ et $\alpha\beta\gamma = 6$, puis en déduire la valeur de $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.