

Série d'exercices — Chapitre 05

Ordre dans $\mathbb{R}$

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1 — Comparaison

★★★★★

Comparer les réels a et b dans chacun des cas suivants.

- 1) $a = 3 + \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$.
- 2) $a = \sqrt{13}$ et $b = \sqrt{6} + \sqrt{7}$.
- 3) $a = 4\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$ et $b = \sqrt{98 - 40\sqrt{6}}$.
- 4) $a = 3 + \sqrt{5}$ et $b = \sqrt{3} + \sqrt{11}$.
- 5) $a = \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$ et $b = 4,2$.
- 6) $a = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$ et $b = 5,8$.
- 7) $a = x^2 + 9$ et $b = 6x$, où x est un réel.

Exercice 2 — Encadrement

★★★★★

- 1) On considère deux réels a et b tels que $2 \leq a \leq 3$ et $1 \leq b \leq 4$. Encadrer $a + b$, $a - b$, ab et $\frac{a}{b}$.
- 2) On considère deux réels x et y tels que $1 \leq x \leq 2$ et $-3 \leq y \leq -1$. Encadrer :
 - $2x - y$; $x^2 + y^2$;
 - xy ; $\frac{1}{x - y}$.

Exercice 3 — Encadrement

★★★★★

- 1) On considère deux réels a et b tels que $-1 < a < 2$ et $1 < b < 3$, et on pose $E = a^2 - 4a + b^2 + 2b$.
 - a) En encadrant chaque terme, montrer que $-5 < E < 23$.
 - b) Vérifier que $E = (a - 2)^2 + (b + 1)^2 - 5$.
 - c) En déduire un encadrement plus précis de E .
- 2) On considère deux réels x et y tels que $2 < x < y$.
 - a) Montrer que $x + y - 4 > 0$.
 - b) Comparer $c = x^2 - 4x + 3$ et $d = y^2 - 4y + 3$.

Exercice 4 — Valeur absolue

★★★★★

- 1) Écrire sans valeur absolue :
 - $|2 - \sqrt{5}|$; $|3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}|$;
 - $|\sqrt{3} - 2|$; $\sqrt{(3 - 2\sqrt{3})^2}$.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
 - $|2x - 3| = 5$; $|x + 1| = -2$; $|x - 2| = |3x + 4|$;
 - $|x - 4| \leq 3$; $|2x + 1| > 5$; $|x + 3| < 0$.

Exercice 5 — Valeur absolue

★★★★★

On considère deux réels x et y tels que $x \geq 1$, $y \leq 2$ et $x - y = 4$.

- 1) Calculer $E = \sqrt{(x - 1)^2} + \sqrt{(y - 2)^2}$.
- 2) Vérifier que $1 \leq x \leq 6$ et que $-3 \leq y \leq 2$.
- 3) Calculer $F = |x - 7| + |y + 4|$.

Exercice 6 — Encadrement et comparaison

★★★★★

On considère deux réels a et b de l'intervalle $[1; 3]$ tels que $a > b$, et on pose $A = ab + a - b$ et $B = ab - a + b$.

- 1) Encadrer A et B , puis comparer A et B .
- 2) Montrer que $|A - B| \leq 4$.

Exercice 7 — Équation avec valeurs absolues

★★★★★

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x - 5| + |x + 1| = 10$.

Exercice 8 — Intervalles

★★★★★

- 1) Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des réels x vérifiant chacune des conditions :
 - $x \geq -2$; $x < 5$;
 - $-3 < x \leq 4$; $x \leq 1$.
- 2) Écrire, si possible, chacun des ensembles suivants sous forme d'un intervalle :
 - a) $[-2; 4] \cap]1; 6[$ et $[-2; 4] \cup]1; 6[$.
 - b) $] - \infty; 3] \cap [0; +\infty[$ et $] - \infty; 3] \cup [5; +\infty[$.
 - c) $[-4; -1[\cap] - 1; 2]$ et $[-4; -1[\cup] - 1; 2]$.
- 3) Déterminer le centre, le rayon et l'amplitude de chacun des intervalles $[1; 7]$; $] - 2; 6[$; $[-5; -1]$.
- 4) Déterminer l'intervalle ouvert de centre 3 et de rayon 2.
- 5) Déterminer l'intervalle fermé de centre 2 dont l'une des bornes est -1 .

Exercice 9 — Approximations

★★★★★

On considère un réel a tel que $\left|a - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{12}$.

- 1) Montrer que $\frac{1}{4} < a < \frac{5}{12}$.
- 2) Montrer que $\frac{3}{22} < \frac{a}{2a+1} < \frac{5}{18}$.
- 3) En déduire que $\frac{41}{198}$ est une valeur approchée de $\frac{a}{2a+1}$ à $\frac{7}{99}$ près.

Exercice 10 — Approximations

★★★★★

On considère un réel x , et on pose $E = \sqrt{1+x^2} - 1$.

- 1) Montrer que $E = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1}$ et que $\sqrt{1+x^2} + 1 \geq 2$.
- 2) a) En déduire que $0 \leq E \leq \frac{x^2}{2}$.
- b) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{1,01}$ à 5×10^{-3} près.

Exercice 11 — Inégalités classiques

★★★★★

On considère trois réels strictement positifs x , y et z . Démontrer les inégalités suivantes.

- 1) $x^2 + y^2 \geq 2xy$ et $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
- 2) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.
- 3) $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$.
- 4) $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$.
- 5) $\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}$.
- 6) $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.