

Série d'exercices — Chapitre 04

Ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1 — Ensembles de nombres

★★★★★

1) Compléter par $\in$ ou $\notin$:

$$\begin{aligned} & -9 \dots \mathbb{N}; \quad 7,2 \dots \mathbb{Z}; \quad \frac{7}{20} \dots \mathbb{D}; \quad \frac{-14}{7} \dots \mathbb{Z}; \\ & -\frac{5}{6} \dots \mathbb{D}; \quad \sqrt{36} \dots \mathbb{N}; \quad \sqrt{8} \dots \mathbb{Q}; \quad 0 \dots \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

2) On considère les nombres suivants :

$$\frac{13}{40}; \quad \frac{2}{9}; \quad \frac{-21}{35}; \quad \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}; \quad 1 + \sqrt{2}; \quad \frac{22}{7}; \quad \frac{\sqrt{50}}{2}; \quad \frac{5}{2^3 \times 7}.$$

- Déterminer ceux qui sont des nombres décimaux.
- Déterminer ceux qui sont rationnels mais non décimaux.
- Déterminer ceux qui sont irrationnels.

Exercice 2 — Calcul dans $\mathbb{R}$

★★★★★

1) Calculer et simplifier :

$$A = \frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{1}{3}; \quad B = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{7}{4} - \frac{1}{3}}; \quad C = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}.$$

2) On considère un réel x . Développer et réduire :

$$E = (3x - 1)^2 - (x + 2)(x - 2); \quad F = (x + 1)^3 - x^3.$$

3) On considère un réel x . Factoriser :

$$G = 4x^2 - 12x + 9; \quad H = (x + 1)^2 - 9; \quad K = x^3 + 27.$$

Exercice 3 — Identités remarquables

★★★★★

On considère des réels a , b , x , y et z .1) Développer et réduire $(a - 2b)^3$ et $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

2) Démontrer les identités suivantes :

$$\begin{aligned} & - (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab; \\ & - (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a - b)^2(a + b)^2. \end{aligned}$$

3) On suppose que $x + y + z = 0$.

- Développer $(x + y)^3$, puis montrer que $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$.
- En déduire que $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Exercice 4 — Puissances, écriture scientifique

★★★★★

1) Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$$\begin{aligned} & - a = 52\,000 \times 300; \quad b = 0,0004 \times 0,006; \\ & - c = 4,5 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^5; \quad d = \frac{6 \times 10^4}{1,5 \times 10^{-2}}. \end{aligned}$$

2) On considère deux réels non nuls x et y . Simplifier :

$$P = \frac{(x^2y^3)^2}{x^3y^4}; \quad Q = \frac{(2x^{-1}y)^3 \times x^4}{4y^2}; \quad R = \frac{3^5 \times 2^{-3}}{9^2 \times 6^{-1}}.$$

3) On considère deux réels non nuls a et b , et $E = (a^3b^{-2})^2 \times (a^{-2}b)^3$.

a) Simplifier E .

b) Donner l'écriture scientifique de E pour $a = 7$ et $b = 0,000\,25$.

Exercice 5 — Racines carrées

★★★★★

1) Simplifier :

$$A = \sqrt{48} - 2\sqrt{27} + \sqrt{75}; \quad B = (2\sqrt{3} - 1)^2; \quad C = \frac{1}{\sqrt{7} - 2} + \frac{1}{\sqrt{7} + 2}.$$

2) Montrer que $(1 + \sqrt{2})^3 = 7 + 5\sqrt{2}$.

Exercice 6 — Racines carrées imbriquées

★★★★★

1) Développer $(2 + \sqrt{3})^2$ et $(2 - \sqrt{3})^2$.

2) En déduire que $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$ et que $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.

3) En déduire la valeur des nombres

$$A = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad B = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} \times \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}.$$

Exercice 7 — Approfondissement

★★★★★

1) On considère un entier naturel n . Montrer que les nombres $(\sqrt{5} - 2)^n$ et $(\sqrt{5} + 2)^n$ sont inverses l'un de l'autre.

2) On considère deux réels non nuls a et b tels que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$.

a) Montrer que $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = 7$.

b) Calculer $\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}$.

3) On considère trois réels x , y et z tels que $xyz = 1$ et tels que $1 + x + xy$, $1 + y + yz$ et $1 + z + zx$ soient non nuls. Montrer que

$$\frac{1}{1 + x + xy} + \frac{1}{1 + y + yz} + \frac{1}{1 + z + zx} = 1.$$

4) On considère deux réels non nuls a et b tels que $a^2 + b^2 = 4ab$.

a) Montrer que $(a + b)^2 = 6ab$ et que $(a - b)^2 = 2ab$.

b) En déduire que $a \neq b$, puis déterminer les valeurs possibles de $\frac{a + b}{a - b}$.