

Série d'exercices — Chapitre 02

Calcul vectoriel

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1 — Égalités vectorielles, relation de Chasles

★★★★★

1) On considère six points A, B, C, D, E et F du plan. Simplifier les sommes suivantes :

$$\begin{aligned} - \vec{s}_1 &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AF}; \\ - \vec{s}_2 &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{ED}. \end{aligned}$$

2) On considère un triangle ABC .

- a) Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB}$.
 b) Montrer que les points M et N sont confondus.

3) On considère un parallélogramme $ABCD$.

- a) Construire le point E tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
 b) Montrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CE}$, puis en déduire que C est le milieu de $[AE]$.

Exercice 2 — Construction du vecteur $a\vec{u} + b\vec{v}$

★★★★★

On considère un triangle ABC ; on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.1) Construire, à partir du point A , des représentants des vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} - 2\vec{u}; \quad -\vec{v}; \quad 2\vec{u} - \vec{v}; \\ - \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}; \quad -\frac{3}{2}\vec{v}; \quad \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}. \end{aligned}$$

2) Construire le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.3) Construire le point N tel que $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$.

Exercice 3 — Calcul vectoriel

★★★★★

On considère un triangle ABC et les points M, N et P définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}; \quad \overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AC}.$$

1) Montrer que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ et que $\overrightarrow{NP} = \frac{8}{3}\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA}$.2) En déduire le réel α tel que $\overrightarrow{NP} = \alpha \overrightarrow{MN}$.

Exercice 4 — Colinéarité de deux vecteurs

★★★★★

On considère un triangle ABC et les vecteurs

$$\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}.$$

- 1) Exprimer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
 2) Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 5 — Parallélisme de deux droites

★★★★★

On considère un triangle ABC et les points I et J définis par

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}.$$

- 1) Exprimer $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
 2) En déduire que les droites (IC) et (BJ) sont parallèles.

Exercice 6 — *Alignement de trois points*

★★★★★

On considère un parallélogramme $ABCD$ et les points P et Q définis par

$$\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

- 1) Exprimer $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{CQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
- 2) En déduire que les points C , P et Q sont alignés.

Exercice 7 — *Milieu d'un segment*

★★★★★

On considère un triangle ABC .

- 1) Construire les points D et E définis par

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

- 2) Montrer que C est le milieu du segment $[ED]$.

Exercice 8 — *Milieu d'un segment*

★★★★★

On considère un triangle ABC , le milieu J du segment $[AC]$ et le point M défini par

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Montrer que M est le milieu du segment $[BJ]$.

Exercice 9 — *Approfondissement : alignement*

★★★★★

On considère un parallélogramme $ABCD$.

- 1) Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AD}$.
- 2) Construire le point F tel que $\overrightarrow{AF} = 5\overrightarrow{AB}$.
- 3) Montrer que $\overrightarrow{CE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ et que $\overrightarrow{FE} = \frac{25}{4}\overrightarrow{AD} - 5\overrightarrow{AC}$.
- 4) En déduire que les points C , E et F sont alignés.

Exercice 10 — *Approfondissement : calcul vectoriel*

★★★★★

On considère un triangle ABC ; on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. On considère les points N et P définis par

$$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\vec{v} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BP} = -\frac{1}{3}\vec{u}.$$

- 1) Montrer que $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\vec{v}$ et que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\vec{u}$.
- 2) a) Exprimer $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{CP}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
b) Montrer que les droites (BN) et (CP) sont parallèles.
- 3) On note I le milieu de $[BN]$ et K le milieu de $[CP]$.
a) Exprimer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
b) En déduire que les points A , I et K sont alignés.
- 4) On considère le point E défini par $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$. Montrer que E appartient à la droite (IK) .

Exercice 11 — *Approfondissement : colinéarité*

★★★★★

On considère un triangle ABC , un réel k et les points M et N définis par

$$\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.$$

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Exercice 12 — *Approfondissement : repère d'une droite*

★★★★★

On considère un triangle ABC , le milieu I de $[BC]$, et un point M de la droite (BC) d'abscisse x dans le repère $(B; \overrightarrow{BC})$ (où x est un réel).

- 1) Montrer que $\overrightarrow{AM} = (1-x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$.
- 2) On considère le point N défini par $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB} + (1-x)\overrightarrow{AC}$. Montrer que I est le milieu de $[MN]$, puis en déduire que N appartient à la droite (BC) .

Exercice 13 — *Problème : la droite d'Euler*

★★★★★

On considère un triangle ABC non rectangle en A , le centre O de son cercle circonscrit, son centre de gravité G et le milieu A' de $[BC]$.

- 1) Faire une figure.
- 2) Montrer que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$.
- 3) Construire le point H défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
- 4) Montrer que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.
- 5) En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires (on pourra utiliser la médiatrice de $[BC]$).
- 6) On admet que, de même, $(BH) \perp (AC)$. Que représente le point H pour le triangle ABC ?
- 7) En utilisant $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, montrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.
- 8) En déduire que les points O , G et H sont alignés. (La droite qui les porte s'appelle la **droite d'Euler** du triangle.)