

## Série d'exercices — Chapitre 01

## Notions d'arithmétique

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

## Exercice 1 — Parité

★★★★★

- 1) On considère un entier naturel  $n$ . Étudier la parité de chacun des nombres suivants :
- $A = 12n + 4$  ;
  - $B = 6n^2 + 10n + 3$  ;
  - $C = n^2 + n + 10$  ;
  - $D = (2n + 1)(2n + 5)$  ;
  - $E = n(n + 1)(n + 5)$  ;
  - $F = n^2 + 7n + 1$ .
- 2) On considère deux entiers pairs  $a$  et  $b$  tels que  $a \geq b$ . Montrer que  $a - b$  est pair.
- 3) Montrer que le produit de deux entiers impairs est impair.
- 4) Montrer que la somme d'un entier pair et d'un entier impair est impaire.
- 5) On considère un entier naturel  $n$ . Montrer que  $(n + 2)(n + 7)$  est pair.
- 6) On considère un entier impair  $a$ . Montrer que  $a^2$  est impair.
- 7) On considère un entier naturel  $a$  tel que  $a^2$  est pair. Montrer que  $a$  est pair (on pourra examiner les deux parités possibles de  $a$ ).
- 8) On considère un entier naturel  $n \geq 1$ . Vérifier que  $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$ , puis montrer que  $n^3 - n$  est pair.

## Exercice 2 — Multiples

★★★★★

- 1) Déterminer les multiples de 7 inférieurs à 80.
- 2) On considère un entier naturel  $n$ . Montrer que le nombre  $3^{n+2} + 3^n$  est un multiple de 10.
- 3) Déterminer les chiffres  $c$  pour lesquels le nombre à quatre chiffres  $\overline{4c56}$  est un multiple de 3.
- 4) On considère trois entiers naturels  $a$ ,  $m$  et  $m'$  tels que  $m$  et  $m'$  sont des multiples de  $a$ . Montrer que  $5m + 2m'$  est un multiple de  $a$ .
- 5) On considère un entier impair  $a$ . Montrer que  $a^2 + 3$  est un multiple de 4.

## Exercice 3 — Diviseurs et critères de divisibilité

★★★★★

- 1) a) Déterminer les diviseurs de 30.  
b) Calculer la somme de ces diviseurs et vérifier qu'elle est un multiple de 24.
- 2) Le nombre 64 215 est-il divisible par 2 ? par 3 ? par 5 ? par 9 ?
- 3) Déterminer les entiers naturels compris entre 200 et 260 qui sont divisibles à la fois par 2 et par 9.
- 4) On considère un entier naturel  $n$ . Montrer que le nombre  $5^{n+1} \times 3^{n+2}$  est divisible par 45.
- 5) a) Déterminer les diviseurs de 20.  
b) On considère deux entiers naturels  $x$  et  $y$  tels que  $x \geq y$ . Montrer que  $x + y$  et  $x - y$  ont la même parité.  
c) En déduire les couples d'entiers naturels  $(x; y)$  tels que  $x^2 - y^2 = 20$ .
- 6) Déterminer le chiffre  $c$  pour lequel le nombre  $\overline{3c75}$  est divisible par 45.
- 7) Déterminer les chiffres  $u$  pour lesquels le nombre à quatre chiffres  $\overline{u482}$  est divisible par 3 mais pas par 9.
- 8) a) Vérifier que, pour tout entier naturel  $x$  :

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1.$$

- b) En déduire une écriture de 10 101 comme produit de deux entiers naturels supérieurs à 1.  
c) En déduire que  $10^8 + 10^4 + 1$  n'est pas un nombre premier.
- 9) On considère un entier naturel non nul  $n$ .  
a) Donner huit diviseurs de  $6n$ , exprimés en fonction de  $n$ .

- b) Donner six diviseurs de  $3n^2 + 3n$ , exprimés en fonction de  $n$ .  
 c) En déduire quatre diviseurs communs à  $6n$  et à  $3n^2 + 3n$ .

**Exercice 4** — PGCD

★★★★★

- 1) a) Déterminer les diviseurs de 54 et ceux de 90.  
 b) En déduire PGCD(54; 90).  
 2) Déterminer les couples d'entiers naturels  $(a; b)$ , avec  $a < b$ , tels que PGCD( $a; b$ ) = 9 et  $a + b = 90$ .

**Exercice 5** — Nombres premiers

★★★★★

- 1) Déterminer, parmi les nombres suivants, ceux qui sont premiers :  
 51 ; 221 ; 223 ; 247 ; 289 ; 311 ; 1001.  
 2) On considère un entier naturel non nul  $n$ .  
 a) Vérifier que  $n^3 + 8 = (n + 2)(n^2 - 2n + 4)$ .  
 b) En déduire que  $n^3 + 8$  n'est pas premier.

**Exercice 6** — Décomposition en facteurs premiers

★★★★★

On considère les entiers naturels  $a = 2352$  et  $b = 3780$ .

- 1) Décomposer  $a$  et  $b$  en produits de facteurs premiers.  
 2) En déduire PGCD( $a; b$ ) et PPCM( $a; b$ ).  
 3) Écrire  $\frac{a}{b}$  sous forme irréductible et simplifier  $\sqrt{a \times b}$ .  
 4) Déterminer le plus petit entier naturel non nul  $m$  tel que  $m \times a$  soit un carré parfait.  
 5) Déterminer le plus petit entier naturel non nul  $p$  tel que  $p \times b$  soit le cube d'un entier naturel.

**Exercice 7** — PGCD, PPCM et fractions

★★★★★

On considère les entiers naturels  $a = 72 \times 35$  et  $b = 6^3 \times 14$ .

- 1) Décomposer  $a$  et  $b$  en produits de facteurs premiers.  
 2) En déduire PGCD( $a; b$ ) et PPCM( $a; b$ ).  
 3) À l'aide des décompositions de 84 et de 120, écrire les fractions  $\frac{11}{84}$  et  $\frac{17}{120}$  avec le plus petit dénominateur commun possible.

**Exercice 8** — Divisibilité et expression littérale

★★★★★

On considère un entier naturel  $n$ .

- 1) Montrer que  $n^2 + 7n + 21 = (n + 3)(n + 4) + 9$ .  
 2) En déduire les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $n + 3$  divise  $n^2 + 7n + 21$ .

**Exercice 9** — Problème concret

★★★★★

Un fleuriste dispose de 378 roses et de 270 tulipes. Il veut composer des bouquets tous identiques (même nombre de roses et même nombre de tulipes dans chaque bouquet) en utilisant toutes ses fleurs.

- 1) Justifier, sans poser de division, que 378 et 270 sont divisibles par 2 et par 9.  
 2) Décomposer 378 et 270 en produits de facteurs premiers.  
 3) Calculer le nombre maximal de bouquets qu'il peut composer, puis la composition de chaque bouquet.

**Exercice 10** — Carrés parfaits

★★★★★

On rappelle qu'un **carré parfait** est un entier naturel qui est le carré d'un entier naturel. On admet qu'un entier naturel strictement compris entre les carrés de deux entiers naturels consécutifs n'est pas un carré parfait.

- 1) Montrer que les nombres suivants sont des carrés parfaits :  
 324 ; 2025 ;  $144 \times 225$  ;  $12^5 \times 3$ .  
 2) On considère un entier naturel  $n$ . Montrer que  $9n^2 + 12n + 4$  est un carré parfait.  
 3) a) Le nombre 200 est-il un carré parfait ? Justifier.

b) On considère un entier naturel non nul  $n$ . Montrer que  $n^2 + n$  n'est pas un carré parfait.