

Devoir surveillé n° 1 — Durée : 2 heures

Arithmétique — Calcul vectoriel — Projection

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Barème : exercice 1 sur 12 points, exercice 2 sur 5 points, exercice 3 sur 3 points (total 20 points). Les points de chaque question sont indiqués entre crochets. Deux questions **bonus** (+0,5 pt chacune) permettent de compenser une erreur ; la note est plafonnée à 20.

Exercice 1 — Notions d'arithmétique — 12 points

★★★★★

- 1) On considère les entiers naturels $a = 4200$ et $b = 4410$.
 - a) En utilisant la méthode de décomposition, montrer que $a = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$ et que $b = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$. [2 pts]
 - b) En déduire PGCD($a; b$) et PPCM($a; b$). [2 pts]
 - c) Écrire $\frac{a}{b}$ sous forme irréductible, calculer $\frac{a}{b} + \frac{1}{21}$ et simplifier $\sqrt{a \times b}$. [2 pts]
 - 2) On considère un entier naturel n , et les nombres $A = 3^{n+2} + 3^n$ et $B = 5 \times 2^{n+1} + 2^{n+3}$. Montrer que A est un multiple de 10 et que 9 divise B . [2,5 pts]
 - 3) Le nombre 337 est-il premier ? Justifier. [1,5 pt]
 - 4) On considère un entier impair n . Montrer que $n^2 + 7$ est un multiple de 8. [2 pts]
- Bonus [+0,5 pt].** En déduire que, pour tout entier impair n , le nombre $n^4 - 1$ est un multiple de 16.

Exercice 2 — Calcul vectoriel — 5 points

★★★★★

On considère un parallélogramme $ABCD$ et les points M et N définis par

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AD}.$$

- 1) Faire une figure. [1 pt]
- 2) Montrer que $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ et que $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. [1 pt]
- 3) En déduire que C est le milieu de $[MN]$. [0,5 pt]
- 4) On considère le point K défini par $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$. Montrer que C est le milieu de $[AK]$. [1 pt]
- 5) Montrer que les droites (BD) et (MN) sont parallèles. [1,5 pt]

Bonus [+0,5 pt]. On considère le point G défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Montrer que G appartient à la fois à la droite (MD) et à la droite (BN) .

Exercice 3 — Projection — 3 points

★★★★★

On considère un triangle ABC et le point E défini par $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$. On note F le projeté de E sur (AB) parallèlement à (AC) , et J le projeté de E sur (AC) parallèlement à (AB) .

- 1) Faire une figure. [0,5 pt]
- 2) En utilisant une projection, montrer que $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$. [1 pt]
- 3) a) Montrer que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$. [0,5 pt]
- b) Montrer que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AJ}$. [0,5 pt]
- c) Quelle est la nature du quadrilatère $AFEJ$? Justifier. [0,5 pt]