

Cours — Chapitre 09

Trigonométrie 1

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Le radian et le cercle trigonométrique — II. Angles orientés de deux vecteurs — III. Lignes trigonométriques d’un réel — IV. Relations trigonométriques.

Dans tout le chapitre, le plan est muni d’un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$; x et y désignent des nombres réels.

I. Le radian et le cercle trigonométrique

1. Le radian

Définition 1

On considère un cercle de centre O et de rayon 1. Le **radian** (rad) est la mesure d’un angle géométrique de sommet O qui intercepte sur ce cercle un arc de longueur 1.

Propriété 1 : Conversions

Un angle plat mesure 180° , π rad et 200 grades. Si un angle mesure D degrés, R radians et G grades, alors
$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200}.$$

Exemple 1

$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad} = \frac{200}{3} \text{ gr} ; \quad \frac{3\pi}{4} \text{ rad} = 135^\circ = 150 \text{ gr}.$

Remarque

Sur un cercle de rayon r , un angle au centre de θ radians intercepte un arc de longueur $r\theta$ et délimite un secteur d’aire $\frac{1}{2}r^2\theta$.

2. Cercle trigonométrique

Définition 2

On note $I(1; 0)$ et $J(0; 1)$. Le **cercle trigonométrique** est le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O , de rayon 1, orienté dans le **sens direct** (sens inverse des aiguilles d’une montre), avec l’origine I .

3. Abscisses curvilignes

Définition 3

On considère un point M de $(\mathcal{C})$. Si x est la longueur (comptée positivement dans le sens direct, négativement sinon) d’un arc allant de I à M , on dit que x est une **abscisse curviligne** de M .

- Si x est une abscisse curviligne de M , les abscisses curvilignes de M sont les réels $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Une seule appartient à l’intervalle $] - \pi; \pi]$: c’est l’**abscisse curviligne principale** de M .

Définition 4 : Congruence modulo 2π

On dit que x et y sont **congrus modulo 2π** , et on note $x \equiv y [2\pi]$, s’il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = 2k\pi$.

Exemple 2

Déterminer l’abscisse curviligne principale du point M d’abscisse curviligne $\frac{29\pi}{6}$.

Solution

$$\frac{29\pi}{6} = \frac{29\pi}{6} - 4\pi + 4\pi = \frac{5\pi}{6} + 2 \times 2\pi, \text{ et } \frac{5\pi}{6} \in]-\pi; \pi]. \text{ L'abscisse curviligne principale est } \frac{5\pi}{6}.$$

Méthode

Pour trouver l'abscisse principale de $\frac{p\pi}{q}$: on écrit $\frac{p}{q}$ sous la forme $2k + r$ avec $-1 < r \leq 1$ (on enlève le plus proche multiple pair de π).

II. Angles orientés de deux vecteurs**1. Définition****Définition 5**

On considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et les points M et N de $(\mathcal{C})$ tels que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient de même sens que $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si x et y sont des abscisses curvilignes de M et N , on dit que $y - x$ est une **mesure de l'angle orienté** $(\vec{u}; \vec{v})$.

- Les mesures de $(\vec{u}; \vec{v})$ sont les réels $y - x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; on note $\widehat{(\vec{u}; \vec{v})} \equiv y - x [2\pi]$.
- La mesure appartenant à $] - \pi; \pi]$ est la **mesure principale** de $(\vec{u}; \vec{v})$.

2. Propriétés**Propriété 2**

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$:

- $\widehat{(\vec{u}; \vec{u})} \equiv 0 [2\pi]$ et $\widehat{(\vec{u}; -\vec{u})} \equiv \pi [2\pi]$;
- $\widehat{(\vec{v}; \vec{u})} \equiv -\widehat{(\vec{u}; \vec{v})} [2\pi]$;
- relation de Chasles : $\widehat{(\vec{u}; \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}; \vec{w})} \equiv \widehat{(\vec{u}; \vec{w})} [2\pi]$;
- $\widehat{(-\vec{u}; \vec{v})} \equiv \widehat{(\vec{u}; -\vec{v})} \equiv \widehat{(\vec{u}; \vec{v})} + \pi [2\pi]$ et $\widehat{(-\vec{u}; -\vec{v})} \equiv \widehat{(\vec{u}; \vec{v})} [2\pi]$;
- pour tous réels a, b strictement positifs : $\widehat{(a\vec{u}; b\vec{v})} \equiv \widehat{(\vec{u}; \vec{v})} [2\pi]$.

Application 1

On considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\widehat{(\vec{u}; \vec{v})} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$. Déterminer la mesure principale de $\widehat{(\vec{v}; \vec{u})}$, $\widehat{(3\vec{u}; -\vec{v})}$ et $\widehat{(-\vec{v}; -2\vec{u})}$.

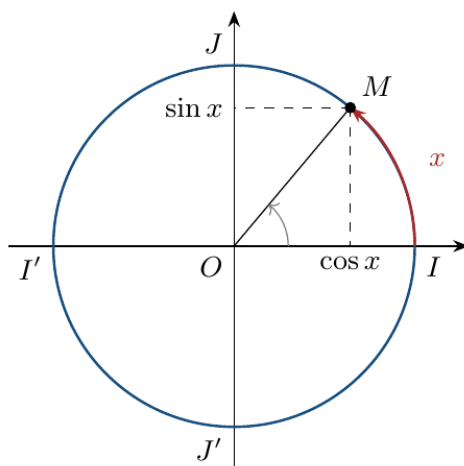
Solution

- $\widehat{(\vec{v}; \vec{u})} \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$: mesure principale $-\frac{\pi}{6}$.
- $\widehat{(3\vec{u}; -\vec{v})} \equiv \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6} \equiv -\frac{5\pi}{6} [2\pi]$: mesure principale $-\frac{5\pi}{6}$.
- $\widehat{(-\vec{v}; -2\vec{u})} \equiv \widehat{(\vec{v}; \vec{u})} \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$.

III. Lignes trigonométriques d'un réel**1. Cosinus et sinus****Définition 6**

On considère un réel x et le point M de $(\mathcal{C})$ d'abscisse curviligne x . Le **cosinus** et le **sinus** de x sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée de M :

$$M(\cos x; \sin x).$$



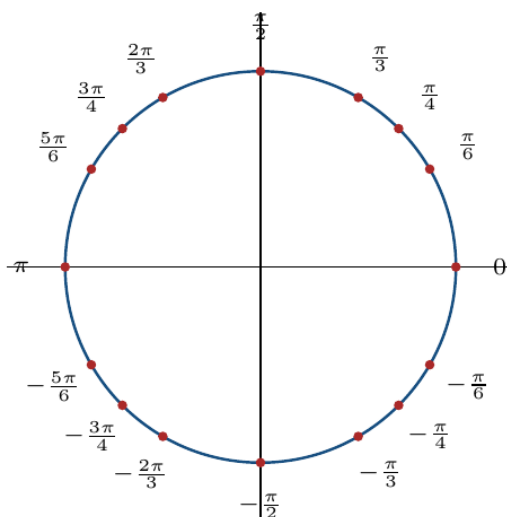
Pour tout réel x et tout entier relatif k :

- ## 2. Tangente

Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$ (c'est-à-dire $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), la **tangente** de x est $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ et $\tan(x + k\pi) = \tan x$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini



3

1. Angles associés

Propriété 5

Pour tout réel x :

	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
cos	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
sin	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$

Lorsque les tangentes sont définies : $\tan(-x) = -\tan x$, $\tan(\pi - x) = -\tan x$, $\tan(\pi + x) = \tan x$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$.

Exemple 3

Calculer $\cos \frac{5\pi}{6}$, $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\tan \frac{7\pi}{4}$.

Solution

- $\cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\tan \frac{7\pi}{4} = \tan\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

2. Calculer une ligne à partir d'une autre

Application 2

On considère un réel x de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ tel que $\sin x = \frac{3}{5}$. Calculer $\cos x$ et $\tan x$.

Solution

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. Comme $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, le point M est dans le deuxième quadrant et $\cos x < 0$:
 $\cos x = -\frac{4}{5}$. Puis $\tan x = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$.

Application 3

Simplifier $A = \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(3\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Solution

$\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$; $\sin(3\pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$. Donc $A = -2\sin x$.

À retenir — l'essentiel du chapitre

- $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200}$; abscisse principale dans $]-\pi; \pi]$; $x \equiv y [2\pi] \iff x - y = 2k\pi$.
- Chasles : $(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w}) \equiv (\vec{u}; \vec{w}) [2\pi]$.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; angles associés : tableau du IV.