

Cours — Chapitre 08

Équations, inéquations et systèmes

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Équations et inéquations du premier degré — II. Systèmes et inéquations à deux inconnues — III. Équations du second degré — IV. Signe du trinôme et inéquations du second degré.

I. Équations et inéquations du premier degré

1. Équations du premier degré à une inconnue

Propriété 1

On considère deux réels a et b et l'équation $(E) : ax + b = 0$, d'inconnue réelle x .

— Si $a \neq 0$: (E) admet une unique solution, $x = -\frac{b}{a}$.

— Si $a = 0$ et $b = 0$: tout réel est solution, $S = \mathbb{R}$.

— Si $a = 0$ et $b \neq 0$: (E) n'a pas de solution, $S = \emptyset$.

Méthode

— **Équation produit** : $A \times B = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$.

— **Équation quotient** : $\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0$ et $B \neq 0$; on commence par déterminer les valeurs interdites.

Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(2x - 3)(x + 5) = 0$ et $\frac{x - 1}{x + 2} = 3$.

Solution

— $(2x - 3)(x + 5) = 0 \iff x = \frac{3}{2}$ ou $x = -5$: $S = \left\{-5; \frac{3}{2}\right\}$.

— Valeur interdite : -2 . Pour $x \neq -2$: $\frac{x - 1}{x + 2} = 3 \iff x - 1 = 3x + 6 \iff x = -\frac{7}{2}$, qui n'est pas interdite :
 $S = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$.

Application 1

On considère un réel m . Résoudre dans $\mathbb{R}$, selon les valeurs de m , l'équation $(m - 2)x = m^2 - 4$.

Solution

— Si $m \neq 2$: $x = \frac{(m - 2)(m + 2)}{m - 2} = m + 2$, $S = \{m + 2\}$.

— Si $m = 2$: l'équation s'écrit $0 \times x = 0$, $S = \mathbb{R}$.

2. Signe de $ax + b$ et inéquations

Propriété 2

On considère deux réels $a \neq 0$ et b . Le binôme $ax + b$ s'annule en $x_0 = -\frac{b}{a}$; il est **du signe de $-a$ avant x_0** et **du signe de a après x_0** :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		signe de $-a$	0	signe de a	

Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{2x - 4}{3 - x} \geq 0$.

Solution

Valeur interdite : 3. Tableau de signes :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$2x - 4$		−	0	+		+	
$3 - x$		+		+	0	−	
quotient		−	0	+		−	

$S = [2; 3[.$

II. Systèmes et inéquations à deux inconnues

1. Systèmes de deux équations du premier degré

Définition 1

On considère des réels a, b, c, a', b', c' et le système $(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ d'inconnues réelles x et y . Le **déterminant** de (S) est $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$.

Propriété 3 : Méthode des déterminants

— Si $D \neq 0$, le système admet un **unique** couple solution :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D} \quad \text{et} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}.$$

— Si $D = 0$, le système admet soit aucune solution, soit une infinité de solutions.

Remarque

Géométriquement (chapitre 06), chaque équation est celle d'une droite : $D \neq 0$ signifie que les droites sont sécantes ; $D = 0$ qu'elles sont parallèles (strictement : aucune solution ; confondues : infinité de solutions).

Exemple 3

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x + 4y = -7 \end{cases}$.

Solution

$D = 3 \times 4 - 1 \times (-2) = 14 \neq 0$; $D_x = 7 \times 4 - (-7) \times (-2) = 14$; $D_y = 3 \times (-7) - 1 \times 7 = -28$.
Donc $x = 1$ et $y = -2$: $S = \{(1; -2)\}$.

2. Inéquations du premier degré à deux inconnues

Propriété 4

Le plan est rapporté à un repère. On considère une droite $(D) : ax + by + c = 0$. Elle partage le plan en deux **demi-plans** : l'un est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c > 0$, l'autre celui des points tels que $ax + by + c < 0$.

Méthode

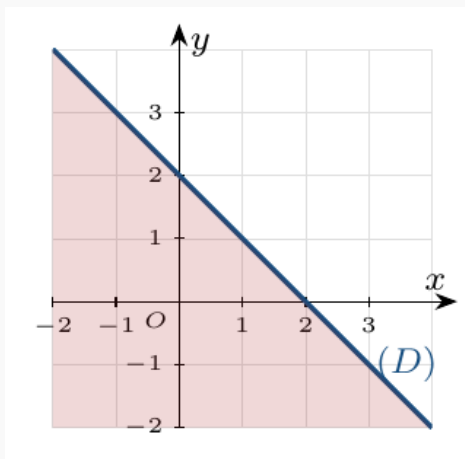
Pour résoudre graphiquement $ax + by + c \leq 0$: on trace (D) , on teste un point hors de (D) (souvent O) ; si ses coordonnées vérifient l'inéquation, la solution est le demi-plan qui contient ce point (bord compris), sinon c'est l'autre. Pour un système d'inéquations, on prend l'intersection des demi-plans.

Exemple 4

Résoudre graphiquement l'inéquation $x + y - 2 \leq 0$.

Solution

On trace la droite $(D) : x + y - 2 = 0$. Pour $O(0;0) : 0 + 0 - 2 = -2 \leq 0$, donc l'ensemble des solutions est le demi-plan fermé de bord (D) qui contient O (zone colorée).

**III. Équations du second degré****1. Discriminant****Définition 2**

On considère des réels $a \neq 0$, b , c . L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est une **équation du second degré** ; le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est son **discriminant**.

Propriété 5 : Forme canonique

Pour tout réel x : $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$.

2. Résolution**Théorème 1**

On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$: deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$: une solution (double) $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$: aucune solution réelle.

Exemple 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2x^2 - 5x - 3 = 0$; $4x^2 - 12x + 9 = 0$; $x^2 + x + 1 = 0$.

Solution

- $\Delta = 25 + 24 = 49$: $x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{5+7}{4} = 3$; $S = \left\{ -\frac{1}{2}; 3 \right\}$.

$$\begin{aligned} - \Delta &= 144 - 144 = 0 : x_0 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} ; S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}. \\ - \Delta &= 1 - 4 = -3 < 0 : S = \emptyset. \end{aligned}$$

Remarque

Certaines équations se résolvent sans Δ : $x^2 - 7x = 0 \iff x(x - 7) = 0$; $x^2 = 5 \iff x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$.

3. Somme et produit des racines**Propriété 6**

Si $\Delta \geq 0$, les racines x_1 et x_2 (éventuellement égales) de $ax^2 + bx + c = 0$ vérifient

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Application 2

- 1) Vérifier que 1 est une solution de $3x^2 + 4x - 7 = 0$ et en déduire l'autre solution.
- 2) Déterminer deux réels dont la somme vaut 5 et le produit vaut -14 .

Solution

- 1) $3 + 4 - 7 = 0$. Le produit des racines vaut $-\frac{7}{3}$, donc l'autre solution est $-\frac{7}{3}$.
- 2) Ces réels sont les solutions de $t^2 - 5t - 14 = 0$: $\Delta = 25 + 56 = 81$, $t = \frac{5 \pm 9}{2}$, soit 7 et -2 .

4. Factorisation du trinôme**Propriété 7**

On considère le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

- Si $\Delta > 0$: $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$: $P(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$: $P(x)$ ne se factorise pas en produit de binômes du premier degré.

Exemple 6

$$2x^2 - 5x - 3 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3) = (2x + 1)(x - 3) ; \quad 4x^2 - 12x + 9 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = (2x - 3)^2.$$

IV. Signe du trinôme et inéquations du second degré**1. Signe du trinôme****Propriété 8**

On considère le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

- Si $\Delta < 0$: $P(x)$ est du signe de a pour tout réel x .
- Si $\Delta = 0$: $P(x)$ est du signe de a , et s'annule en x_0 .
- Si $\Delta > 0$ (avec $x_1 < x_2$) : $P(x)$ est du signe de a **à l'extérieur** des racines, et du signe de $-a$ **entre** les racines.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

2. Inéquations du second degré

Exemple 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2x^2 - 5x - 3 < 0$; $-x^2 + 2x - 5 \geq 0$.

Solution

- Racines $-\frac{1}{2}$ et 3 , et $a = 2 > 0$: le trinôme est négatif strictement entre ses racines. $S =]-\frac{1}{2}; 3[$.
- $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$ et $a = -1 < 0$: le trinôme est strictement négatif pour tout réel. $S = \emptyset$.

Application 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{x^2 - x - 6}{x - 1} \leq 0$.

Solution

Valeur interdite : 1. $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$.

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$x^2 - x - 6$		+	0	−		−	0	+	
$x - 1$		−		−	0	+		+	
quotient		−	0	+		−	0	+	

$S =]-\infty; -2] \cup]1; 3]$.

À retenir — l'essentiel du chapitre

- $ax + b$: signe de $-a$ puis signe de a ; système : $D = ab' - a'b$, $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$.
- $\Delta = b^2 - 4ac$; racines $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.
- Trinôme : signe de a à l'extérieur des racines, signe de $-a$ entre elles.