

Cours — Chapitre 07

Polynômes

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Généralités sur les polynômes — II. Racine d’un polynôme et division par $x - a$ — III. Factorisation d’un polynôme.

I. Généralités sur les polynômes

1. Définitions

Définition 1 : Polynôme

On considère un entier naturel n et des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ avec $a_n \neq 0$. La fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

est un **polynôme** de **degré** n ; on note $\deg P = n$.

- Les réels $a_0, \dots, a_n$ sont les **coefficients** de P ; $a_k x^k$ est un **monôme**.
- Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est le **polynôme nul**; il n’a pas de degré.
- Un polynôme de degré 1, 2 ou 3 est dit respectivement du premier degré, **trinôme** du second degré, polynôme du troisième degré.

Exemple 1

- $P(x) = 4x^3 - x + \sqrt{2}$ est un polynôme de degré 3; $Q(x) = (x - 1)^2 - x^2 = -2x + 1$ est de degré 1.
- $R(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ et $S(x) = \sqrt{x} + 1$ ne sont pas des polynômes.

2. Égalité de deux polynômes

Propriété 1

Deux polynômes sont **égaux** (c’est-à-dire prennent la même valeur pour tout réel x) si et seulement s’ils ont le même degré et les mêmes coefficients pour les monômes de même degré.

Application 1

On considère les polynômes $P(x) = 2x^2 + 7x - 4$ et $Q(x) = (x + 4)(ax + b)$, où a et b sont des réels. Déterminer a et b pour que $P = Q$.

Solution

$Q(x) = ax^2 + (4a + b)x + 4b$. Par identification : $a = 2$, $4a + b = 7$ et $4b = -4$, soit $a = 2$ et $b = -1$ (et $4 \times 2 - 1 = 7$ est bien vérifié).

3. Opérations

Propriété 2

On considère deux polynômes non nuls P et Q . La somme $P + Q$ et le produit PQ sont des polynômes; si $P + Q$ n’est pas nul, $\deg(P + Q) \leq$ le plus grand des degrés de P et Q , et $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.

Exemple 2

On considère les polynômes $P(x) = x^2 - 3x + 1$ et $Q(x) = 2x^3 + x$. Déterminer $P + Q$, puis le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de PQ .

Solution

$(P + Q)(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 1$, de degré 3. Le produit PQ est de degré $2 + 3 = 5$; son terme de plus haut degré est $x^2 \times 2x^3 = 2x^5$, de coefficient 2.

II. Racine d’un polynôme et division par $x - a$

1. Racine d’un polynôme

Définition 2

On considère un polynôme P et un réel a . On dit que a est une **racine** (ou un zéro) de P lorsque $P(a) = 0$.

Exemple 3

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$: $P(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$, donc 1 est une racine de P ; $P(2) = 8 - 8 - 10 + 6 = -4 \neq 0$.

2. Divisibilité par $x - a$

Théorème 1

On considère un polynôme P de degré $n \geq 1$ et un réel a . Le réel a est une racine de P si et seulement s’il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que, pour tout réel x ,

$$P(x) = (x - a) Q(x).$$

On dit alors que P est **divisible** par $x - a$.

Propriété 3 : Division euclidienne par $x - a$

Pour tout polynôme P de degré $n \geq 1$ et tout réel a , il existe un unique polynôme Q de degré $n - 1$ tel que, pour tout réel x ,

$$P(x) = (x - a) Q(x) + P(a).$$

Q est le **quotient** et $P(a)$ le **reste** de la division euclidienne de P par $x - a$.

3. Méthodes de calcul du quotient

Méthode

Identification. On écrit $Q(x) = bx^2 + cx + d$ (pour $\deg P = 3$), on développe $(x - a)Q(x)$ et on identifie les coefficients avec ceux de P .
Méthode de Horner. On dispose les coefficients de P sur une ligne ; on abaisse le premier, puis chaque nouveau coefficient s’obtient en ajoutant au coefficient de P le produit de a par le résultat précédent. Le dernier nombre est le reste $P(a)$.

Exemple 4

Diviser $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ par $x - 3$.

Solution

Schéma de Horner avec $a = 3$:

	2	−3	−11	6
3		6	9	−6
	2	3	−2	0

Le reste est nul : $P(x) = (x - 3)(2x^2 + 3x - 2)$.

Application 2

On considère le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - 4x + m$, où m est un réel.

- 1) Déterminer m pour que P soit divisible par $x + 2$.
- 2) Pour cette valeur de m , déterminer le quotient Q par identification.

Solution

- 1) $P(-2) = -8 + 4 + 8 + m = m + 4$; P est divisible par $x + 2$ si et seulement si $m = -4$.
- 2) $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x + 2)(bx^2 + cx + d) = bx^3 + (2b + c)x^2 + (2c + d)x + 2d$. Par identification : $b = 1$, $c = -1$, $d = -2$. Donc $Q(x) = x^2 - x - 2$.

III. Factorisation d'un polynôme**1. Principe****Propriété 4**

Si a et b sont deux racines distinctes de P , alors P est divisible par $(x - a)(x - b)$.

Méthode

Pour factoriser un polynôme : on cherche une racine « évidente » (parmi 0, 1, -1, 2, -2, $\frac{1}{2}$...), on divise par $x - a$, puis on recommence avec le quotient, ou on utilise les identités remarquables.

2. Exemple complet**Application 3**

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

- 1) Vérifier que 1 et -2 sont des racines de P .
- 2) En déduire une factorisation de $P(x)$ en produit de trois binômes.

Solution

- 1) $P(1) = 0$ (exemple 3) et $P(-2) = -8 - 8 + 10 + 6 = 0$.
- 2) P est divisible par $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$; comme $\deg P = 3$, $P(x) = (x^2 + x - 2)(ax + b)$. Les coefficients de x^3 donnent $a = 1$, les termes constants donnent $-2b = 6$, $b = -3$. Donc

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3).$$

Exemple 5

Factoriser le polynôme $P(x) = x^3 - 7x - 6$.

Solution

$P(-1) = -1 + 7 - 6 = 0$: -1 est une racine évidente. Horner avec $a = -1$: 1 ; $0 - 1 = -1$; $-7 + 1 = -6$; $-6 + 6 = 0$, donc $P(x) = (x + 1)(x^2 - x - 6)$. Le quotient admet la racine 3 ($9 - 3 - 6 = 0$), et $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$. Ainsi $P(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 3)$.

À retenir — l'essentiel du chapitre

- Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coefficients.
- a est racine de $P \iff P(a) = 0 \iff P(x) = (x - a)Q(x)$ avec $\deg Q = \deg P - 1$.
- Le reste de la division de P par $x - a$ est $P(a)$; quotient par identification ou par Horner.