

Cours — Chapitre 06

Droites dans le plan

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Repère et coordonnées — II. Colinéarité de deux vecteurs — III. Équation cartésienne d’une droite — IV. Représentation paramétrique d’une droite — V. Positions relatives de deux droites.

Dans tout le chapitre, le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

I. Repère et coordonnées

1. Coordonnées d’un point, d’un vecteur

Définition 1
On considère un point O et deux vecteurs non colinéaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$; le triplet $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un repère du plan. — Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple de réels $(x; y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$: ce sont les coordonnées de $\vec{u}$, notées $\vec{u}(x; y)$. — Les coordonnées d’un point M sont celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$; on note $M(x; y)$.
Remarque
Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et de norme 1, le repère est dit orthonormé .

2. Calculs sur les coordonnées

Propriété 1
On considère deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ et un réel k . — $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$. — $\vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y')$ et $k\vec{u}(kx; ky)$. — $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$. — Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$. — Si le repère est orthonormé : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
Exemple 1
On considère les points $A(1; -2)$, $B(4; 2)$ et $C(-1; 3)$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, de $\vec{w} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, du milieu I de $[BC]$, puis, le repère étant orthonormé, la distance AB .
Solution
$\overrightarrow{AB}(3; 4)$ et $\overrightarrow{AC}(-2; 5)$, donc $\vec{w}(6 + 2; 8 - 5) = \vec{w}(8; 3)$. $I\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$. $AB = \sqrt{9 + 16} = 5$.

II. Colinéarité de deux vecteurs

1. Déterminant de deux vecteurs

Définition 2
On considère deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$. Le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$

2. Condition de colinéarité

Propriété 2

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$.

Exemple 2

$\vec{u}(6; -4)$ et $\vec{v}(-9; 6)$: $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 6 \times 6 - (-9) \times (-4) = 36 - 36 = 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (en effet $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u}$).

3. Applications : alignement et parallélisme

Propriété 3

- Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = 0$.

Application 1

On considère les points $A(-1; 2)$, $B(2; 3)$ et $C(m; 5)$, où m est un réel. Déterminer m pour que A, B et C soient alignés.

Solution

$\overrightarrow{AB}(3; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(m+1; 3)$. $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 3 \times 3 - (m+1) \times 1 = 8 - m$. Les points sont alignés si et seulement si $8 - m = 0$, soit $m = 8$.

III. Équation cartésienne d'une droite

1. Vecteur directeur

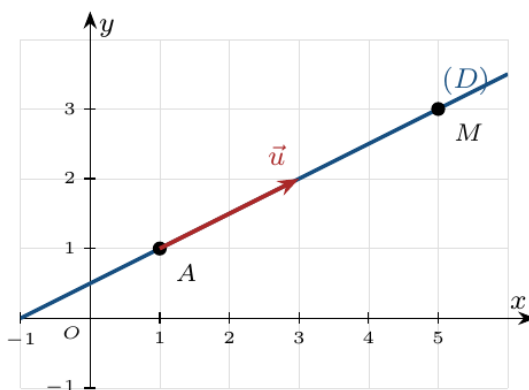
Définition 3

On considère une droite (D) et deux points distincts A et B de (D) . Tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est un **vecteur directeur** de (D) .

Propriété 4

On considère un point A et un vecteur non nul $\vec{u}$. La droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires :

$$M \in (D) \iff \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0.$$



2. Équation cartésienne

Propriété 5

- Toute droite admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$, où a, b, c sont des réels avec $(a; b) \neq (0; 0)$: c'est une **équation cartésienne** de la droite.
- Réciproquement, si $(a; b) \neq (0; 0)$, l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite, de vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$.

Exemple 3

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par $A(1; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2; 1)$.

Solution

Pour tout point $M(x; y)$: $\overrightarrow{AM}(x - 1; y - 1)$ et

$$M \in (D) \iff \begin{vmatrix} x - 1 & 2 \\ y - 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff (x - 1) - 2(y - 1) = 0 \iff x - 2y + 1 = 0.$$

3. Équation réduite

Propriété 6

- Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = mx + p$: c'est son **équation réduite** ; m est le **coefficient directeur** (ou pente) et $\vec{u}(1; m)$ est un vecteur directeur.
- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $x = k$.

Exemple 4

La droite d'équation $x - 2y + 1 = 0$ a pour équation réduite $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; son coefficient directeur est $\frac{1}{2}$.

IV. Représentation paramétrique d'une droite

1. Définition

Propriété 7

On considère la droite (D) passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta)$. Un point $M(x; y)$ appartient à (D) si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ce système est une **représentation paramétrique** de (D) .

Exemple 5

La droite passant par $A(2; -1)$ et $B(5; 1)$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(3; 2)$ et pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Le point $C(8; 3)$ appartient-il à (AB) ? On cherche t : $8 = 2 + 3t$ donne $t = 2$, et alors $-1 + 2 \times 2 = 3$: oui, $C \in (AB)$.

2. Passage d'une écriture à l'autre

Méthode

- *Représentation paramétrique vers équation cartésienne* : on lit un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$, puis on écrit $\det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0$ (ou on élimine t).
- *Équation cartésienne vers représentation paramétrique* : on cherche un point de la droite et le vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$.

Application 2

- 1) Déterminer une équation cartésienne de la droite $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.
- 2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(L) : 3x - y + 2 = 0$.

Solution

- 1) (Δ) passe par $A(1; 3)$, de vecteur directeur $\vec{u}(-1; 2)$. $M(x; y) \in (\Delta) \iff 2(x - 1) + (y - 3) = 0 \iff 2x + y - 5 = 0$.
- 2) $B(0; 2) \in (L)$ et $\vec{v}(1; 3)$ dirige $(L) : \begin{cases} x = t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

V. Positions relatives de deux droites

1. Droites parallèles

Propriété 8

- On considère deux droites (D) et (D') de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.
- $(D) \parallel (D')$ si et seulement si $\det(\vec{u}; \vec{u}') = 0$.
 - Si $(D) : ax + by + c = 0$ et $(D') : a'x + b'y + c' = 0$, alors $(D) \parallel (D') \iff ab' - a'b = 0$.
 - Deux droites parallèles ayant un point commun sont **confondues** ; sinon elles sont **strictement parallèles**.

2. Droites sécantes

Propriété 9

Si $\det(\vec{u}; \vec{u}') \neq 0$, les droites (D) et (D') sont **sécantes** en un unique point, dont les coordonnées vérifient les équations des deux droites.

Exemple 6

Étudier la position relative de $(D) : 2x + y - 4 = 0$ et $(D') : x - y + 1 = 0$.

Solution

$2 \times (-1) - 1 \times 1 = -3 \neq 0$: les droites sont sécantes. Un point $M(x; y)$ commun vérifie $y = x + 1$ (équation de (D')) et, en remplaçant dans l'équation de $(D) : 2x + x + 1 - 4 = 0$, soit $x = 1$, puis $y = 2$. Le point d'intersection est $E(1; 2)$.

Application 3

Étudier la position relative de $(D) : x + 3y - 5 = 0$ et de $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Solution

(D) a pour vecteur directeur $\vec{u}(-3; 1)$, (Δ) a pour vecteur directeur $\vec{v}(1; -1)$; $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 3 - 1 = 2 \neq 0$: les droites sont sécantes. On remplace : $(1 + t) + 3(2 - t) - 5 = 0$, soit $2 - 2t = 0$, donc $t = 1$: le point d'intersection est $(2; 1)$.

À retenir — l'essentiel du chapitre

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$; milieu $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.
- $\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - x'y$; colinéarité $\iff \det = 0$.
- Droite $ax + by + c = 0$ de vecteur directeur $(-b; a)$; représentation paramétrique $x = x_A + \alpha t, y = y_A + \beta t$.
- Parallèles $\iff$ déterminant des vecteurs directeurs nul; sinon sécantes : on résout en remplaçant.