

# Cours — Chapitre 05

## Ordre dans $\mathbb{R}$

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

**Plan du chapitre.** I. Ordre dans  $\mathbb{R}$  — II. Valeur absolue — III. Intervalles de  $\mathbb{R}$  — IV. Approximations.

### I. Ordre dans $\mathbb{R}$

#### 1. Comparaison de deux réels

|                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Définition 1</b>                                                                                                                                                                                                                                                           |
| On considère deux réels $a$ et $b$ .<br>— On dit que $a$ est <b>inférieur ou égal</b> à $b$ , et on note $a \leq b$ , lorsque $b - a$ est positif.<br>— On dit que $a$ est <b>strictement inférieur</b> à $b$ , et on note $a < b$ , lorsque $b - a$ est strictement positif. |
| <b>Méthode</b>                                                                                                                                                                                                                                                                |
| Pour comparer deux réels $a$ et $b$ , on étudie le <b>signe de la différence</b> $a - b$ .                                                                                                                                                                                    |
| <b>Exemple 1</b>                                                                                                                                                                                                                                                              |
| On considère un réel $x$ . Comparer $A = x^2 + 4$ et $B = 4x$ .                                                                                                                                                                                                               |
| <b>Solution</b>                                                                                                                                                                                                                                                               |
| $A - B = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ , qui est positif. Donc $A \geq B$ , avec égalité seulement pour $x = 2$ .                                                                                                                                                                 |

#### 2. Ordre et opérations

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Propriété 1</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| On considère des réels $a, b, c$ et $d$ .<br>— Si $a \leq b$ et $b \leq c$ , alors $a \leq c$ .<br>— $a \leq b$ si et seulement si $a + c \leq b + c$ .<br>— Si $c > 0$ : $a \leq b$ si et seulement si $ac \leq bc$ . Si $c < 0$ : $a \leq b$ si et seulement si $ac \geq bc$ .<br>— Si $a \leq b$ et $c \leq d$ , alors $a + c \leq b + d$ (on peut <b>additionner</b> membre à membre).<br>— Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ , alors $ac \leq bd$ (on peut <b>multiplier</b> membre à membre des inégalités entre réels positifs). |
| <b>Attention</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| On ne soustrait pas et on ne divise pas des inégalités membre à membre. Pour encadrer $a - b$ , on encadre d'abord $-b$ , puis on additionne ; pour encadrer $\frac{a}{b}$ , on encadre $\frac{1}{b}$ , puis on multiplie.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b>Propriété 2 : Inverses, carrés, racines carrées</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| On considère deux réels $a$ et $b$ .<br>— Si $a$ et $b$ sont strictement positifs, ou strictement négatifs : $a \leq b$ si et seulement si $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ .<br>— Si $a$ et $b$ sont positifs : $a \leq b \iff a^2 \leq b^2 \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>Exemple 2</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| Comparer $a = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ et $b = \sqrt{15}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <b>Solution</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| $a$ et $b$ sont positifs, on compare leurs carrés : $a^2 = 8 + 2\sqrt{15}$ et $b^2 = 15$ . Or $a^2 - b^2 = 2\sqrt{15} - 7 = \sqrt{60} - \sqrt{49}$ , qui est strictement positif car $60 > 49$ . Donc $a^2 > b^2$ et $a > b$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |

### 3. Encadrement

#### Définition 2

On considère des réels  $x$ ,  $a$  et  $b$ . Écrire  $a \leq x \leq b$  (ou avec des inégalités strictes), c'est donner un **encadrement** de  $x$ ; le nombre  $b - a$  est l'**amplitude** de cet encadrement.

#### Application 1

On considère deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $2 \leq x \leq 3$  et  $1 \leq y \leq 4$ . Encadrer  $x + y$ ,  $x - y$ ,  $xy$  et  $\frac{x}{y}$ .

#### Solution

- $3 \leq x + y \leq 7$ .
- $-4 \leq -y \leq -1$ , donc  $-2 \leq x - y \leq 2$ .
- Les réels sont positifs :  $2 \leq xy \leq 12$ .
- $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{y} \leq 1$  et  $2 \leq x \leq 3$ , réels positifs :  $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 3$ .

## II. Valeur absolue

### 1. Définition

#### Définition 3

On considère un réel  $x$ . La **valeur absolue** de  $x$ , notée  $|x|$ , est définie par :

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0 \quad \text{et} \quad |x| = -x \text{ si } x \leq 0.$$

#### Exemple 3

$$|-7| = 7; \quad |\pi - 4| = 4 - \pi \text{ (car } \pi < 4); \quad |\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2 \text{ (car } 5 > 4).$$

### 2. Propriétés

#### Propriété 3

Pour tous réels  $x$  et  $y$  :

- $|x| \geq 0$ ;  $|-x| = |x|$ ;  $\sqrt{x^2} = |x|$ ;  $|x|^2 = x^2$ ;
- $|xy| = |x| |y|$  et, si  $y \neq 0$ ,  $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ ;
- $|x + y| \leq |x| + |y|$  (inégalité triangulaire);
- $|x| = |y|$  si et seulement si  $x = y$  ou  $x = -y$ .

### 3. Distance de deux réels

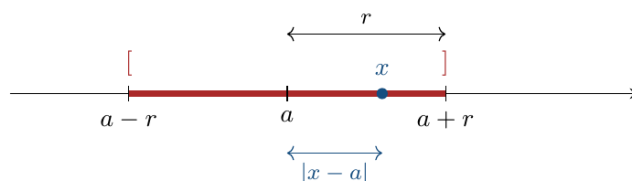
#### Définition 4

On considère deux réels  $a$  et  $b$ , de points images  $A$  et  $B$  sur une droite graduée. La **distance** entre  $a$  et  $b$  est le réel  $|a - b| = AB$ .

#### Propriété 4

On considère un réel  $a$  et un réel  $r$  strictement positif. Pour tout réel  $x$  :

- $|x - a| = r$  si et seulement si  $x = a + r$  ou  $x = a - r$ ;
- $|x - a| \leq r$  si et seulement si  $a - r \leq x \leq a + r$ ;
- $|x - a| \geq r$  si et seulement si  $x \leq a - r$  ou  $x \geq a + r$ .

**Application 2**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $|x - 3| = 5$  ;  $|2x + 1| = |x - 4|$  ;  $|x + 2| \leq 1$ .

**Solution**

- $|x - 3| = 5 \iff x = 8$  ou  $x = -2$ .
- $|2x + 1| = |x - 4| \iff 2x + 1 = x - 4$  ou  $2x + 1 = -x + 4 \iff x = -5$  ou  $x = 1$ .
- $|x + 2| \leq 1 \iff |x - (-2)| \leq 1 \iff -3 \leq x \leq -1$ .

**III. Intervalles de  $\mathbb{R}$** **1. Définitions****Définition 5**

On considère deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$ . On définit les **intervalles** :

| Intervalle | Ensemble des réels $x$ tels que | Intervalle       | Ensemble des réels $x$ tels que |
|------------|---------------------------------|------------------|---------------------------------|
| $[a; b]$   | $a \leq x \leq b$               | $[a; +\infty[$   | $x \geq a$                      |
| $]a; b[$   | $a < x < b$                     | $]a; +\infty[$   | $x > a$                         |
| $[a; b[$   | $a \leq x < b$                  | $] - \infty; b]$ | $x \leq b$                      |
| $]a; b]$   | $a < x \leq b$                  | $] - \infty; b[$ | $x < b$                         |

**Remarque**

- Les symboles  $+\infty$  et  $-\infty$  ne sont pas des réels : le crochet est toujours ouvert de leur côté. On note  $\mathbb{R} = ] - \infty; +\infty[$ .
- Pour l'intervalle  $[a; b]$  : le **centre** est  $\frac{a+b}{2}$ , le **rayon** est  $\frac{b-a}{2}$  et l'**amplitude** est  $b - a$ .

**Propriété 5**

On considère un réel  $a$  et un réel  $r$  strictement positif. Pour tout réel  $x$  :

$$|x - a| \leq r \iff x \in [a - r; a + r] \quad \text{et} \quad |x - a| < r \iff x \in ]a - r; a + r[.$$

**2. Intersection et réunion****Définition 6**

On considère deux ensembles  $E$  et  $F$ .

- L'**intersection** de  $E$  et  $F$ , notée  $E \cap F$ , est l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $E$  **et** à  $F$ .
- La **réunion** de  $E$  et  $F$ , notée  $E \cup F$ , est l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $E$  **ou** à  $F$ .
- L'ensemble qui ne contient aucun élément est l'**ensemble vide**, noté  $\emptyset$ .

**Exemple 4**

$$[-2; 5] \cap ]1; 8] = ]1; 5]; \quad [-2; 5] \cup ]1; 8] = [-2; 8]; \quad ] - \infty; 0[ \cap [3; +\infty[ = \emptyset.$$

**Application 3**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $|2x - 1| > 3$  et écrire l'ensemble des solutions à l'aide d'intervalles.

**Solution**

$|2x - 1| > 3 \iff 2x - 1 < -3 \text{ ou } 2x - 1 > 3 \iff x < -1 \text{ ou } x > 2$ . L'ensemble des solutions est  $S = ] - \infty; -1[ \cup ]2; +\infty[$ .

**IV. Approximations****1. Valeur approchée à une précision donnée****Définition 7**

On considère un réel  $x$  et un réel  $r$  strictement positif. On dit qu'un réel  $a$  est une **valeur approchée** de  $x$  à la précision  $r$  (ou à  $r$  près) lorsque  $|x - a| \leq r$ .

- Si  $a \leq x \leq a + r$ , on dit que  $a$  est une valeur approchée **par défaut** de  $x$  à  $r$  près.
- Si  $a - r \leq x \leq a$ , on dit que  $a$  est une valeur approchée **par excès** de  $x$  à  $r$  près.

**Exemple 5**

Comme  $1,41 \leq \sqrt{2} \leq 1,42$  (car  $1,41^2 = 1,9881$  et  $1,42^2 = 2,0164$ ), le nombre 1,41 est une valeur approchée par défaut de  $\sqrt{2}$  à  $10^{-2}$  près, et 1,42 une valeur approchée par excès.

**2. Approximation à partir d'un encadrement****Propriété 6**

On considère des réels  $x$ ,  $a$  et  $b$  tels que  $a \leq x \leq b$ . Alors le centre  $\frac{a+b}{2}$  est une valeur approchée de  $x$  à  $\frac{b-a}{2}$  près.

**Application 4**

On considère un réel  $x$  tel que  $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{3}{4}$ . Donner une valeur approchée de  $x$  et la précision correspondante.

**Solution**

Le centre vaut  $\frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right) = \frac{17}{24}$  et le rayon  $\frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{24}$ . Donc  $\frac{17}{24}$  est une valeur approchée de  $x$  à  $\frac{1}{24}$  près.

**À retenir — l'essentiel du chapitre**

- $a \leq b$  signifie que  $b - a$  est positif : pour comparer, on étudie le signe d'une différence.
- On additionne des inégalités de même sens ; on ne multiplie que des inégalités entre positifs.
- $|x - a| \leq r \iff x \in [a - r; a + r]$  ;  $|x| = |y| \iff x = y \text{ ou } x = -y$ .
- Si  $a \leq x \leq b$ , alors  $\frac{a+b}{2}$  est une valeur approchée de  $x$  à  $\frac{b-a}{2}$  près.