

Cours — Chapitre 04

Ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Les ensembles de nombres — II. Opérations dans $\mathbb{R}$ — III. Puissances et écriture scientifique — IV. Racines carrées.

I. Les ensembles de nombres

1. Les entiers naturels et les entiers relatifs

Définition 1 : $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

— L'ensemble des **entiers naturels** est $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ (chapitre 01).

— Les entiers naturels et leurs opposés forment l'ensemble des **entiers relatifs**, noté $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

— On note $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers relatifs non nuls.

Exemple 1

$$-7 \in \mathbb{Z} \text{ mais } -7 \notin \mathbb{N}; \quad \frac{-18}{6} = -3 \in \mathbb{Z}; \quad \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

2. Les nombres décimaux

Définition 2 : $\mathbb{D}$

Un nombre **décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemple 2

— $-3,25 = \frac{-325}{10^2} \in \mathbb{D}; \quad \frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3} \in \mathbb{D}.$

— $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$: son écriture décimale $0,333\dots$ ne s'arrête pas.

Remarque

Une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ (avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$) est un nombre décimal si et seulement si la décomposition de b en facteurs premiers ne contient que des 2 et des 5. Par exemple $\frac{7}{40} = \frac{7}{2^3 \times 5} \in \mathbb{D}$, mais $\frac{5}{12} = \frac{5}{2^2 \times 3} \notin \mathbb{D}$.

3. Les nombres rationnels

Définition 3 : $\mathbb{Q}$

Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemple 3

$$\frac{-2}{7} \in \mathbb{Q}; \quad 0,6 = \frac{3}{5} \in \mathbb{Q}; \quad 4 = \frac{4}{1} \in \mathbb{Q}; \quad \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4} \in \mathbb{Q}.$$

4. Les nombres réels

Définition 4 : $\mathbb{R}$

Tous les nombres rencontrés jusqu'ici (abscisses des points d'une droite graduée) forment l'ensemble des **nombres réels**, noté $\mathbb{R}$. Un réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**.

Exemple 4

On admet que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ et π sont des nombres irrationnels : $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

5. Inclusions entre ces ensembles

Définition 5 : Inclusion

On considère deux ensembles E et F . On dit que E est **inclus** dans F , et on note $E \subset F$, si tout élément de E est un élément de F . Sinon, on note $E \not\subset F$.

Propriété 1

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Remarque

- Ces inclusions sont **strictes** : $-1 \in \mathbb{Z}$ et $-1 \notin \mathbb{N}$; $0,5 \in \mathbb{D}$ et $0,5 \notin \mathbb{Z}$; $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- On note $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels non nuls, $\mathbb{R}_+$ celui des réels positifs ou nuls et $\mathbb{R}_+^*$ celui des réels strictement positifs.

Application 1

Compléter par $\in$ ou $\notin$: $-4 \dots \mathbb{N}$; $\frac{21}{7} \dots \mathbb{N}$; $\frac{1}{4} \dots \mathbb{D}$; $\frac{2}{3} \dots \mathbb{D}$; $\sqrt{25} \dots \mathbb{Z}$; $\pi \dots \mathbb{Q}$.

Solution

$-4 \notin \mathbb{N}$; $\frac{21}{7} = 3 \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{4} = 0,25 \in \mathbb{D}$; $\frac{2}{3} \notin \mathbb{D}$ (dénominateur 3); $\sqrt{25} = 5 \in \mathbb{Z}$; $\pi \notin \mathbb{Q}$.

II. Opérations dans $\mathbb{R}$

1. Propriétés de l'addition et de la multiplication

Propriété 2

Pour tous réels a , b et c :

- $a + b = b + a$ et $ab = ba$ (commutativité);
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ et $(ab)c = a(bc)$ (associativité);
- $a + 0 = a$, $a \times 1 = a$, $a + (-a) = 0$ et, si $a \neq 0$, $a \times \frac{1}{a} = 1$;
- $a(b + c) = ab + ac$ (distributivité);
- $ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.

2. Calculs sur les fractions

Propriété 3

Pour tous réels a , c et tous réels non nuls b , d :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc.$$

Si de plus $c \neq 0$: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Exemple 5

Calculer $A = \frac{5}{6} - \frac{3}{4} \times \frac{2}{9}$ et $B = \frac{1 - \frac{2}{5}}{\frac{3}{10}}$.

Solution

$$A = \frac{5}{6} - \frac{6}{36} = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$B = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{10}} = 2.$$

3. Identités remarquables**Propriété 4**

Pour tous réels a et b :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$;
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$; $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Solution**Démonstration de la quatrième identité.**

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Exemple 6

On considère un réel x .

- 1) Développer $(2x - 3)^2$ et $(x + 2)^3$.
- 2) Factoriser $9x^2 - 25$ et $x^3 - 8$.

Solution

- 1) $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$; $(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.
- 2) $9x^2 - 25 = (3x - 5)(3x + 5)$; $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

Application 2

On considère deux réels a et b tels que $a + b = 5$ et $ab = 3$. Calculer $a^2 + b^2$ et $a^3 + b^3$.

Solution

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 25 - 6 = 19.$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 5 \times (19 - 3) = 80.$$

III. Puissances et écriture scientifique**1. Puissance d'un réel****Définition 6**

On considère un réel a et un entier naturel non nul n .

- $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$, et $a^0 = 1$ si $a \neq 0$.
- Si $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Propriété 5

Pour tous réels non nuls a, b et tous entiers relatifs m, n :

$$a^m \times a^n = a^{m+n} ; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} ; \quad (a^m)^n = a^{mn} ; \quad (ab)^n = a^n b^n ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Remarque

- $(-1)^n = 1$ si n est pair et $(-1)^n = -1$ si n est impair.
- En général, $(a + b)^n \neq a^n + b^n$: par exemple $(1 + 1)^2 = 4$ et $1^2 + 1^2 = 2$.

Exemple 7

Simplifier $A = \frac{2^5 \times 3^{-2} \times 6^3}{4^3 \times 3}$.

Solution

$$6^3 = 2^3 \times 3^3 \text{ et } 4^3 = 2^6, \text{ donc } A = \frac{2^{5+3} \times 3^{-2+3}}{2^6 \times 3} = 2^{8-6} \times 3^{1-1} = 2^2 = 4.$$

2. Écriture scientifique**Définition 7**

Tout nombre décimal non nul x s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = a \times 10^p,$$

où $p \in \mathbb{Z}$ et a est un nombre décimal ayant **un seul chiffre non nul avant la virgule** (au signe près). Cette écriture est l'**écriture scientifique** de x .

Exemple 8

- $45\,600 = 4,56 \times 10^4$; $0,000\,72 = 7,2 \times 10^{-4}$; $-305 = -3,05 \times 10^2$.
- $\frac{1,2 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-2}}{3 \times 10^{-4}} = \frac{6 \times 10^3}{3 \times 10^{-4}} = 2 \times 10^7$.

IV. Racines carrées**1. Définition****Définition 8**

On considère un réel **positif** a . La **racine carrée** de a est l'unique réel **positif** dont le carré est égal à a ; on la note $\sqrt{a}$.

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad \text{et} \quad \sqrt{a} \text{ est positif.}$$

Exemple 9

$$\sqrt{49} = 7 ; \quad \sqrt{0} = 0 ; \quad \sqrt{0,09} = 0,3 ; \quad \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Attention

Pour un réel x quelconque, $\sqrt{x^2} = x$ si x est positif, et $\sqrt{x^2} = -x$ si x est négatif. Par exemple $\sqrt{(-5)^2} = 5 = -(-5)$.

2. Propriétés

Propriété 6

Pour tous réels positifs a et b :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} ; \quad \text{si } b \neq 0, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Attention

En général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$: par exemple $\sqrt{9+16} = 5$ alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.

Exemple 10

Simplifier $\sqrt{72}$ et $C = 3\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{80}$.

Solution

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}.$$

$$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \quad \sqrt{45} = 3\sqrt{5}, \quad \sqrt{80} = 4\sqrt{5}; \text{ donc } C = 6\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 7\sqrt{5}.$$

3. Expression conjuguée

Méthode

On considère deux réels positifs a et b tels que $a \neq b$. Pour supprimer la racine d'un dénominateur de la forme $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, on multiplie numérateur et dénominateur par l'**expression conjuguée** $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, car

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b.$$

Exemple 11

Écrire sans radical au dénominateur : $\frac{6}{\sqrt{3}}$ et $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.

Solution

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Application 3

On pose $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

1) Calculer xy , x^2 et y^2 .

2) En déduire que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 10$.

Solution

$$1) \quad xy = 3 - 2 = 1; \quad x^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}; \quad y^2 = 5 - 2\sqrt{6}.$$

$$2) \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{10}{1} = 10.$$

À retenir — l'essentiel du chapitre

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{D}$: $\frac{a}{10^n}$; $\mathbb{Q}$: $\frac{a}{b}$; $\sqrt{2}$ et π sont irrationnels.
- Identités : $(a \pm b)^2$, $(a-b)(a+b)$, $(a \pm b)^3$, $a^3 \pm b^3$.
- Puissances : $a^m a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; écriture scientifique $a \times 10^p$.
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (avec a, b positifs); conjugué : $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$.