

Cours — Chapitre 03

Projection dans le plan

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Projection sur une droite parallèlement à une autre droite — II. Propriétés de la projection — III. Théorème de Thalès et traduction vectorielle.

Dans tout le chapitre, on travaille dans le plan ; les lettres k, x désignent des nombres réels.

I. Projection sur une droite parallèlement à une autre droite

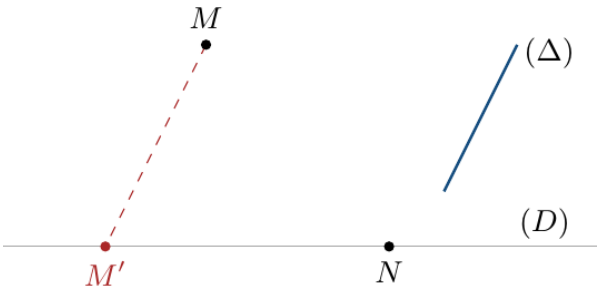
1. Définition

Définition 1 : Projeté d'un point

On considère deux droites (D) et (Δ) **sécantes**, et un point M du plan.

La droite passant par M et parallèle à (Δ) coupe la droite (D) en un **unique** point M' . Ce point M' s'appelle le **projeté** de M sur (D) parallèlement à (Δ) .

L'application qui associe à chaque point M du plan son projeté M' s'appelle la **projection** sur (D) parallèlement à (Δ) .



Remarque

- Si M appartient à (D) , alors son projeté est M lui-même : $M' = M$ (c'est le cas du point N de la figure).
- Si $M \neq M'$, alors la droite (MM') est parallèle à (Δ) .
- Les droites (D) et (Δ) doivent être sécantes : si elles étaient parallèles, la parallèle à (Δ) passant par M ne couperait pas (D) (ou serait confondue avec elle).

2. Projection orthogonale

Définition 2

Lorsque (Δ) est **perpendiculaire** à (D) , la projection sur (D) parallèlement à (Δ) s'appelle la **projection orthogonale** sur (D) . Le projeté M' d'un point M est alors le pied de la perpendiculaire à (D) passant par M .

Exemple 1

On considère un triangle ABC et la hauteur (AH) issue de A (avec $H \in (BC)$). Le point H est le projeté orthogonal de A sur (BC) .

Application 1

On considère un parallélogramme $ABCD$ de centre O . Déterminer :

- 1) le projeté de D sur (AB) parallèlement à (BC) ;
- 2) le projeté de C sur (AB) parallèlement à (BC) ;
- 3) le projeté de O sur (BD) parallèlement à (AC) .

Solution

- 1) La parallèle à (BC) passant par D est la droite (AD) (car $(AD) \parallel (BC)$) ; elle coupe (AB) en A . Le projeté de D est A .
- 2) La parallèle à (BC) passant par C est la droite (BC) elle-même ; elle coupe (AB) en B . Le projeté de C est B .
- 3) O appartient à la droite (BD) : son projeté est O .

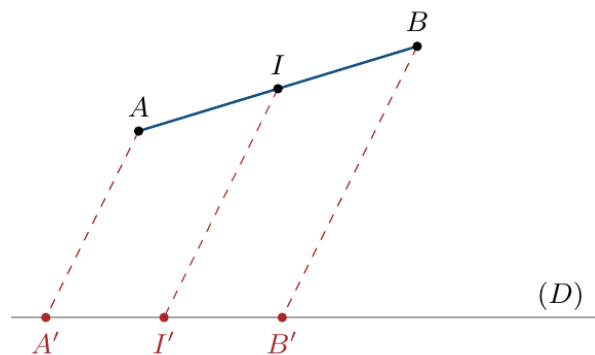
II. Propriétés de la projection

1. Conservation du milieu

Propriété 1

On considère une projection sur (D) parallèlement à (Δ) , deux points A et B de projetés A' et B' , et le milieu I de $[AB]$. Alors le projeté I' de I est le **milieu** de $[A'B']$.

On dit que la projection **conserve le milieu**.



2. Conservation du coefficient de colinéarité

Propriété 2

On considère une projection sur (D) parallèlement à (Δ) , et quatre points A, B, C, E de projetés respectifs A', B', C', E' . Pour tout réel k :

$$\text{si } \overrightarrow{CE} = k \overrightarrow{AB}, \quad \text{alors } \overrightarrow{C'E'} = k \overrightarrow{A'B'}.$$

Remarque

- La réciproque est fausse : deux vecteurs non colinéaires peuvent avoir des projetés colinéaires (les projetés sont tous sur la même droite (D)).
- Cas particulier très utile : si M est le point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'M'} = k \overrightarrow{A'B'}$.
- La propriété 1 est le cas $k = \frac{1}{2}$: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ donne $\overrightarrow{A'I'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A'B'}$.

Exemple 2

On considère un triangle ABC et le point M défini par $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$. On note N le projeté de M sur (AB) parallèlement à (AC) . Exprimer $\overrightarrow{BN}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$.

Solution

Par la projection sur (AB) parallèlement à (AC) :

- $B \in (AB)$, donc son projeté est B ;
- la parallèle à (AC) passant par C est (AC) , qui coupe (AB) en A : le projeté de C est A ;
- le projeté de M est N .

Comme $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$, la propriété 2 donne $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BA}$.

Application 2

On considère un triangle ABC , le milieu I de $[BC]$ et le point E défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. On note F le projeté de E sur (AC) parallèlement à (BC) , et J le projeté de I sur (AC) parallèlement à (AB) .

- 1) Exprimer $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
- 2) Montrer que J est le milieu de $[AC]$.

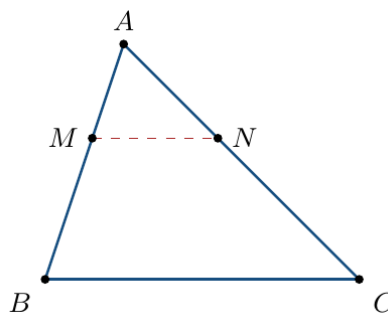
Solution

- 1) Projection sur (AC) parallèlement à (BC) : A a pour projeté A , B a pour projeté C (la droite (BC) coupe (AC) en C), E a pour projeté F . De $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, on déduit $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
- 2) Projection sur (AC) parallèlement à (AB) : B a pour projeté A , C a pour projeté C . Comme I est le milieu de $[BC]$, son projeté J est le milieu de $[AC]$ (conservation du milieu).

III. Théorème de Thalès**1. Théorème de Thalès****Théorème 1 : Thalès**

On considère un triangle ABC , un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (AC) . Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

**Exemple 3**

Dans la figure ci-dessus, on donne $AB = 5$, $AC = 4$, $BC = 6$ et $AM = 2$, avec $(MN) \parallel (BC)$. Calculer AN et MN .

Solution

D'après le théorème de Thalès : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$, soit $\frac{2}{5} = \frac{AN}{4} = \frac{MN}{6}$.
Donc $AN = \frac{2 \times 4}{5} = \frac{8}{5}$ et $MN = \frac{2 \times 6}{5} = \frac{12}{5}$.

2. Réciproque du théorème de Thalès**Théorème 2 : Réciproque**

On considère un triangle ABC , un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (AC) , tels que les points A, M, B soient dans le **même ordre** que les points A, N, C . Si

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC},$$

alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Attention

La condition sur l'ordre des points est indispensable : si $M \in [AB]$ et si N est sur la demi-droite opposée à $[AC]$, l'égalité des rapports ne suffit pas.

Exemple 4

On considère un triangle ABC tel que $AB = 9$ et $AC = 6$, un point E de $[AB]$ tel que $AE = 3$ et un point F de $[AC]$ tel que $AF = 2$. Montrer que $(EF) \parallel (BC)$.

Solution

$\frac{AE}{AB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ et $\frac{AF}{AC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Les rapports sont égaux, et les points A, E, B sont dans le même ordre que A, F, C ($E \in [AB]$ et $F \in [AC]$). D'après la réciproque du théorème de Thalès, $(EF) \parallel (BC)$.

3. Traduction vectorielle**Propriété 3 : Thalès vectoriel**

On considère un triangle ABC et un réel k . On considère le point M défini par $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et le projeté N de M sur (AC) parallèlement à (BC) . Alors

$$\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC}.$$

Réciproquement, si M et N vérifient $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$, avec $k \neq 0$, alors $(MN) \parallel (BC)$.

Solution

Démonstration. La projection sur (AC) parallèlement à (BC) envoie A sur A , B sur C et M sur N ; la propriété 2 donne $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$. Ensuite :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} = k(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = k\overrightarrow{BC}.$$

Pour la réciproque, le même calcul donne $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et $(MN) \parallel (BC)$.

Remarque

La version vectorielle contient l'information sur l'**ordre des points** : le signe de k indique si M est du même côté que B par rapport à A ($k > 0$) ou du côté opposé ($k < 0$). C'est pourquoi elle s'applique sans précaution supplémentaire.

Application 3

On considère un parallélogramme $ABCD$, le point E défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, et le projeté F de E sur (AB) parallèlement à (BC) .

- 1) Montrer que $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{FE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$.
- 2) On donne $AB = 5$ et $AD = 3$. Calculer AF et FE .

Solution

- 1) On applique la propriété 3 dans le triangle ACB : projection sur (AB) parallèlement à (BC) , qui envoie C sur B et E sur F . De $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ on déduit

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{FE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}.$$

Comme $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{FE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$.

- 2) $AF = \frac{2}{5} \times 5 = 2$ et $FE = \frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5}$.

À retenir — l’essentiel du chapitre

- Projeté de M sur (D) parallèlement à (Δ) : intersection de (D) et de la parallèle à (Δ) passant par M .
- La projection conserve le milieu et le coefficient de colinéarité : $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{AB} \implies \overrightarrow{C'E'} = k\overrightarrow{A'B'}$.
- Thalès : $(MN) \parallel (BC) \implies \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$; réciproque avec l’ordre des points.
- Thalès vectoriel : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et N projeté de M sur (AC) parallèlement à $(BC) \implies \overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC}$.