

Cours — Chapitre 02

Calcul vectoriel

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Égalité de deux vecteurs, somme de deux vecteurs — II. Produit d’un vecteur par un réel — III. Colinéarité de deux vecteurs et applications — IV. Caractérisation vectorielle du milieu d’un segment.

Dans tout le chapitre, on travaille dans le plan ; les lettres $k, k', a, b, \alpha, \beta, x$ désignent des nombres réels.

I. Égalité de deux vecteurs, somme de deux vecteurs

1. Notion de vecteur

Définition 1 : Vecteur

On considère deux points A et B distincts du plan. Le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- sa **direction** : celle de la droite (AB) ;
- son **sens** : de A vers B ;
- sa **norme** (ou longueur) : la distance AB , notée $\|\overrightarrow{AB}\|$.

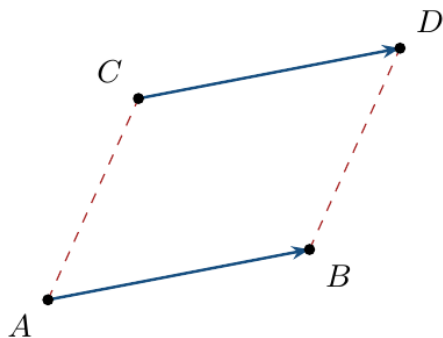
Le point A est l’**origine** et B l’**extrémité** du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Lorsque $A = B$, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$; il n’a ni direction ni sens, et sa norme vaut 0.

2. Égalité de deux vecteurs

Définition 2 : Vecteurs égaux

Deux vecteurs non nuls sont **égaux** s’ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

On considère quatre points A, B, C et D :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC \text{ est un parallélogramme (éventuellement aplati).}$$


Remarque

- Un vecteur ne dépend pas de son origine : on le note souvent avec une seule lettre, $\vec{u}, \vec{v}, \dots$. Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, on dit que $\overrightarrow{AB}$ est un **représentant** de $\vec{u}$.
- Pour tout point O et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un **unique** point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
- Attention à l’ordre des lettres : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que $ABDC$ (et non $ABCD$) est un parallélogramme.

Exemple 1

On considère un parallélogramme $EFGH$. Citer deux égalités de vecteurs.

Solution

$EFGH$ est un parallélogramme, donc ses côtés opposés $[EF]$ et $[HG]$ sont parallèles, de même longueur et « dans le même sens » : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$. De même, $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$.

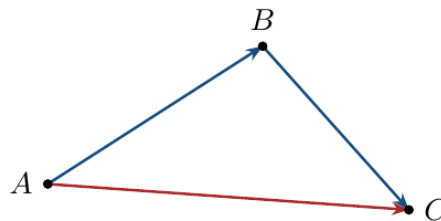
3. Somme de deux vecteurs, relation de Chasles**Définition 3 : Somme de deux vecteurs**

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et un point A . On construit le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, puis le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$. La **somme** $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Propriété 1 : Relation de Chasles

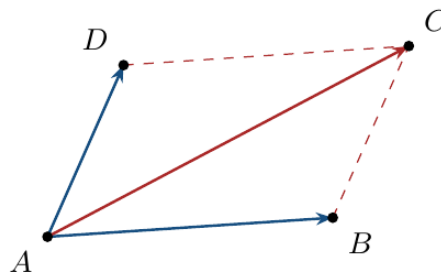
Pour tous points A , B et C du plan :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

**Propriété 2 : Règle du parallélogramme**

On considère trois points A , B et D , et le point C tel que $ABCD$ est un parallélogramme. Alors

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

**Propriété 3 : Règles de calcul**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativité) ;
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associativité) ;
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.

4. Opposé d'un vecteur, différence de deux vecteurs**Définition 4**

- L'**opposé** du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, noté $-\vec{u}$. On a $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.
- La **différence** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Remarque

- Pour tous points A , B et O : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
- Cette écriture permet d'« introduire » n'importe quel point O dans un vecteur : c'est l'outil de base des démonstrations vectorielles.

Exemple 2

On considère quatre points A, B, C et D . Simplifier

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}.$$

Solution

On transforme les différences en sommes : $-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$ et $-\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA}$. Donc

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Application 1

On considère cinq points A, B, C, D et E .

- 1) Simplifier $\vec{u} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.
- 2) Montrer que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Solution

- 1) On réordonne les termes pour enchaîner les lettres :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}.$$

- 2) On introduit le point D dans $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

II. Produit d'un vecteur par un réel**1. Définition****Définition 5 : Produit $k\vec{u}$**

On considère un vecteur **non nul** $\vec{u}$ et un réel **non nul** k . Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur :

- de même direction que $\vec{u}$;
- de même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, de sens contraire si $k < 0$;
- de norme $k \times \|\vec{u}\|$ si $k > 0$, et de norme $(-k) \times \|\vec{u}\|$ si $k < 0$.

Par convention, $0 \times \vec{u} = \vec{0}$ et $k \times \vec{0} = \vec{0}$.

Exemple 3

On considère trois points A, B, C alignés tels que B est entre A et C , avec $AB = 2$ et $BC = 4$.

- $\overrightarrow{AC}$ a le même sens que $\overrightarrow{AB}$ et $AC = 6 = 3 \times AB$, donc $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{CB}$ est de sens contraire à $\overrightarrow{AB}$ et $CB = 4 = 2 \times AB$, donc $\overrightarrow{CB} = -2\overrightarrow{AB}$.

2. Propriétés**Propriété 4**

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et tous réels k, k' :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$;
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$;
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$;
- $1 \times \vec{u} = \vec{u}$ et $(-1) \times \vec{u} = -\vec{u}$;
- $k\vec{u} = \vec{0} \iff (k = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0})$.

Remarque

Ces règles permettent de calculer avec les vecteurs comme avec les nombres : développer, réduire, factoriser. Mais on ne **multiplie** jamais deux vecteurs entre eux, et on ne divise jamais par un vecteur.

Exemple 4

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Réduire

$$\vec{w} = 3(\vec{u} - 2\vec{v}) - 2\left(\frac{1}{2}\vec{u} - 4\vec{v}\right).$$

Solution

$$\vec{w} = 3\vec{u} - 6\vec{v} - \vec{u} + 8\vec{v} = 2\vec{u} + 2\vec{v}.$$

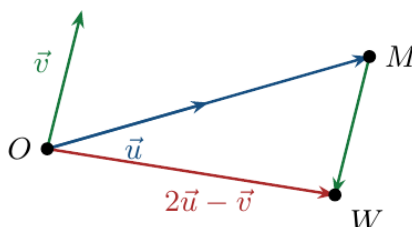
3. Construction du vecteur $a\vec{u} + b\vec{v}$
Méthode

Pour construire, à partir d'un point O , le point W tel que $\overrightarrow{OW} = a\vec{u} + b\vec{v}$:

- 1) on construit le point M tel que $\overrightarrow{OM} = a\vec{u}$;
- 2) à partir de M , on construit le point W tel que $\overrightarrow{MW} = b\vec{v}$;
- 3) d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MW} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Exemple 5 : construction de $2\vec{u} - \vec{v}$

On place M tel que $\overrightarrow{OM} = 2\vec{u}$, puis W tel que $\overrightarrow{MW} = -\vec{v}$. Alors $\overrightarrow{OW} = 2\vec{u} - \vec{v}$.


Application 2

On considère un triangle ABC et les points E et F définis par

$$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}.$$

- 1) Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis construire le point E .
- 2) Exprimer $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- 3) En déduire que $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB}$, puis montrer que A est le milieu de $[CF]$.

Solution

- 1) $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
D'après la règle du parallélogramme, E est le quatrième sommet du parallélogramme $ABEC$.
- 2) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC}$.
- 3) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$.
De plus, $\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$: les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont égaux, donc A est le milieu de $[CF]$.

III. Colinéarité de deux vecteurs et applications

1. Vecteurs colinéaires
Définition 6 : Colinéarité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si l'un des deux est nul, ou s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, ils sont colinéaires exactement lorsqu'ils ont la **même direction**.

Exemple 6

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et les vecteurs $\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ et $\vec{b} = -4\vec{u} + 6\vec{v}$.
On a $\vec{b} = -2(2\vec{u} - 3\vec{v}) = -2\vec{a}$: les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.

Remarque

- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
- Si $\vec{u} = k\vec{v}$ avec $k \neq 0$, alors $\vec{v} = \frac{1}{k}\vec{u}$: la relation est symétrique.

2. Parallélisme de deux droites**Propriété 5**

On considère quatre points A , B , C et D , avec $A \neq B$ et $C \neq D$.

$$(AB) \parallel (CD) \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont colinéaires.}$$

3. Alignement de trois points**Propriété 6**

On considère trois points A , B et C :

$$A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires.}$$

Méthode

Pour montrer que trois points (ou deux droites) vérifient une propriété d'alignement (ou de parallélisme) :

- 1) on exprime les vecteurs utiles en fonction de **deux mêmes vecteurs de référence** non colinéaires, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$;
- 2) on cherche un réel k tel que l'un des vecteurs soit égal à k fois l'autre ;
- 3) on conclut avec la propriété 5 ou 6.

Exemple 7

On considère un triangle ABC et les points M et N définis par

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Montrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Solution

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, donc $(MN) \parallel (BC)$.

Application 3

On considère un parallélogramme $ABCD$ et les points E et F définis par

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}.$$

- 1) Exprimer $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
- 2) En déduire que les points C , E et F sont alignés.

Solution

- 1) $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

2) On remarque que $\overrightarrow{CE} = -2 \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) = -2\overrightarrow{CF}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires, donc C , E et F sont alignés.

4. Repère d'une droite

Propriété 7 : Abscisse d'un point sur une droite

On considère deux points distincts A et B . Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement s'il existe un réel x tel que

$$\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB}.$$

Ce réel x est unique ; on l'appelle l'**abscisse** de M dans le **repère** $(A; \overrightarrow{AB})$ de la droite (AB) .

Exemple 8

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB})$ de la droite (AB) : le point A a pour abscisse 0, le point B a pour abscisse 1 et le milieu de $[AB]$ a pour abscisse $\frac{1}{2}$. Le point P défini par $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{AB}$ a pour abscisse -2 .

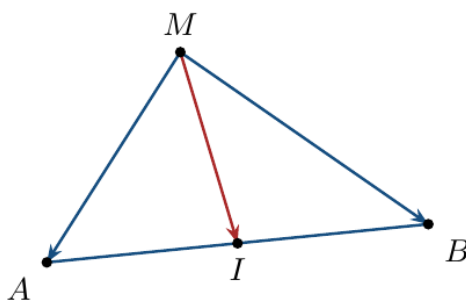
IV. Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment

1. Le milieu d'un segment

Propriété 8

On considère deux points A et B , et un point I . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- 1) I est le milieu du segment $[AB]$;
- 2) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$;
- 3) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
- 4) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$;
- 5) pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.



Solution

Démonstration de 4) $\implies$ 5). Si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, alors pour tout point M :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI}.$$

Réciproquement, si 5) est vraie pour tout point M , elle l'est pour $M = I$: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{II} = \vec{0}$.

Exemple 9

On considère un parallélogramme $ABCD$ de centre O . Montrer que, pour tout point M du plan,

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}.$$

Solution

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu : O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$. D'après la propriété 8 :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}.$$

En additionnant : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

2. Centre de gravité d'un triangle
Propriété 9

On considère un triangle ABC , le milieu A' de $[BC]$ et le centre de gravité G du triangle (point de concours des médianes). Alors

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Solution

Démonstration de la seconde égalité. A' est le milieu de $[BC]$, donc $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}$. De $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, on tire $\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$, et $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$. Donc

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} + 2 \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'} = \vec{0}.$$

Application 4

On considère un triangle ABC , le milieu I de $[AB]$ et le point M défini par

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}.$$

- 1) Montrer que $2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
- 2) En déduire que $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$, puis placer le point M .

Solution

- 1) $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{MB}$ (Chasles) et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ (I milieu de $[AB]$). L'égalité devient

$$2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

- 2) On introduit I dans $\overrightarrow{MB}$: $2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, soit $3\overrightarrow{MI} = -\overrightarrow{IB}$, d'où

$$\overrightarrow{IM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB}.$$

Le point M est sur le segment $[IB]$, au tiers de $[IB]$ à partir de I .

À retenir — l'essentiel du chapitre

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC$ parallélogramme. Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- Parallélogramme $ABCD$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Pour tout O : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires : l'un est nul ou $\vec{u} = k\vec{v}$. Parallélisme : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires. Alignement : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires.
- I milieu de $[AB]$ $\iff \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \iff$ pour tout M , $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
- G centre de gravité de ABC : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.