

Cours — Chapitre 01

Notions d'arithmétique

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Nombres pairs et nombres impairs — II. Multiples d'un entier naturel et PPCM — III. Diviseurs d'un entier naturel et PGCD — IV. Nombres premiers — V. Décomposition en produit de facteurs premiers et applications.

Dans tout ce chapitre, on travaille uniquement avec des **entiers naturels** ; les lettres a, b, k, m, n, p, q désignent des entiers naturels, sauf mention contraire.

I. Nombres pairs et nombres impairs

1. L'ensemble des entiers naturels

Définition 1 : Entiers naturels

- Les nombres $0, 1, 2, 3, \dots$ sont les **entiers naturels**. Leur ensemble est noté $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$.
- L'ensemble des entiers naturels **non nuls** est noté $\mathbb{N}^*$: $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}$.
- Si n est un entier naturel, on écrit $n \in \mathbb{N}$ (« n appartient à $\mathbb{N}$ ») ; sinon on écrit $n \notin \mathbb{N}$.

Exemple 1

- $17 \in \mathbb{N}$; $0 \in \mathbb{N}$ mais $0 \notin \mathbb{N}^*$.
- $\frac{12}{4} \in \mathbb{N}$, car $\frac{12}{4} = 3$.
- $\frac{7}{2} \notin \mathbb{N}$, car $\frac{7}{2} = 3,5$; $2,4 \notin \mathbb{N}$.

Remarque

- La somme et le produit de deux entiers naturels sont des entiers naturels.
- La différence $a - b$ de deux entiers naturels n'est un entier naturel que si $a \geq b$: par exemple $3 - 8 \notin \mathbb{N}$.

2. Nombres pairs, nombres impairs

Définition 2 : Parité

On considère un entier naturel n .

- n est **pair** s'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$.
- n est **impair** s'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$.

Tout entier naturel est soit pair, soit impair (et jamais les deux).

Exemple 2

- 96 est pair, car $96 = 2 \times 48$ avec $48 \in \mathbb{N}$.
- 57 est impair, car $57 = 2 \times 28 + 1$ avec $28 \in \mathbb{N}$.
- 0 est pair, car $0 = 2 \times 0$; 1 est impair, car $1 = 2 \times 0 + 1$.

Méthode

Pour étudier la parité d'une expression entière A , on cherche à l'écrire sous la forme $A = 2k$ ou $A = 2k + 1$, en **précisant** que k est un entier naturel.

Exemple 3

On considère un entier naturel n . Étudier la parité des nombres $A = 10n + 6$ et $B = 4n^2 + 6n + 9$.

Solution

— $A = 10n + 6 = 2(5n + 3)$. On pose $k = 5n + 3$; on a $k \in \mathbb{N}$, donc $A = 2k$: A est **pair**.

— $B = 4n^2 + 6n + 8 + 1 = 2(2n^2 + 3n + 4) + 1$. On pose $k = 2n^2 + 3n + 4$; on a $k \in \mathbb{N}$, donc $B = 2k + 1$: B est **impair**.

3. Règles de calcul sur la parité

Propriété 1 : Somme et produit

On considère deux entiers naturels a et b .

a	b	$a + b$	$a \times b$
pair	pair	pair	pair
pair	impair	impair	pair
impair	pair	impair	pair
impair	impair	pair	impair

En particulier, un produit d’entiers naturels est pair dès que l’un des facteurs est pair.

Exemple 4 : démonstration d’une ligne du tableau

Montrer que la somme de deux entiers impairs est paire.

Solution

On considère deux entiers impairs a et b . Il existe deux entiers naturels k et k' tels que $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$. Alors

$$a + b = 2k + 2k' + 2 = 2(k + k' + 1).$$

Comme $k + k' + 1 \in \mathbb{N}$, l’entier $a + b$ est pair.

Propriété 2 : Deux entiers consécutifs

Pour tout entier naturel n , le produit $n(n + 1)$ est **pair**.

Solution

Démonstration. On distingue deux cas.

— Si n est pair, alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$, donc $n(n + 1) = 2(k(n + 1))$ est pair.

— Si n est impair, alors $n + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$ est pair, donc $n(n + 1)$ est pair.

Dans les deux cas, $n(n + 1)$ est pair.

Remarque

— La méthode utilisée ci-dessus s’appelle un **raisonnement par disjonction des cas** : on traite séparément le cas « n pair » et le cas « n impair ».

— Un entier n et son carré n^2 ont **la même parité** : si $n = 2k$, alors $n^2 = 2(2k^2)$; si $n = 2k + 1$, alors $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.

Application 1

On considère un entier naturel n .

1) Étudier la parité des nombres $C = 14n + 21$ et $D = n^2 + 3n$.

2) Montrer que $E = n^2 + n + 7$ est impair.

Solution

1) $C = 14n + 20 + 1 = 2(7n + 10) + 1$ avec $7n + 10 \in \mathbb{N}$: C est impair.
 $D = n^2 + 3n = n(n + 1) + 2n$. Le nombre $n(n + 1)$ est pair (propriété 2) et $2n$ est pair ; leur somme est paire : D est pair.

2) $E = n(n + 1) + 7$. Le nombre $n(n + 1)$ est pair, donc $n(n + 1) = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi $E = 2k + 6 + 1 = 2(k + 3) + 1$

avec $k + 3 \in \mathbb{N}$: E est impair.

II. Multiples d’un entier naturel et PPCM

1. Multiples d’un entier naturel

Définition 3 : Multiple

On considère deux entiers naturels a et m . On dit que m est un **multiple** de a s’il existe un entier naturel k tel que

$$m = k \times a.$$

Exemple 5

- 91 est un multiple de 7, car $91 = 13 \times 7$.
- Les multiples de 4 sont 0, 4, 8, 12, 16, ... c’est-à-dire les nombres $4k$, avec $k \in \mathbb{N}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $5^{n+1} + 5^n$ est un multiple de 6 :

$$5^{n+1} + 5^n = 5^n \times 5 + 5^n = 5^n(5 + 1) = 6 \times 5^n, \quad \text{avec } 5^n \in \mathbb{N}.$$

Remarque

- 0 est un multiple de tout entier naturel a , car $0 = 0 \times a$.
- Tout entier naturel m est un multiple de 1 et de lui-même : $m = m \times 1 = 1 \times m$.
- Un entier naturel non nul a admet une **infinité** de multiples : 0, a , $2a$, $3a$, ...
- Un entier est pair si et seulement s’il est un multiple de 2.

Propriété 3 : Somme de multiples

On considère trois entiers naturels a , m et m' . Si m et m' sont deux multiples de a , alors, pour tous entiers naturels p et q , l’entier $pm + qm'$ est un multiple de a .

Solution

Démonstration. On écrit $m = ka$ et $m' = k'a$ avec $k, k' \in \mathbb{N}$. Alors

$$pm + qm' = pka + qk'a = (pk + qk')a,$$

et $pk + qk' \in \mathbb{N}$: l’entier $pm + qm'$ est un multiple de a .

Application 2

- 1) Déterminer les multiples de 9 inférieurs à 70.
- 2) On considère un entier naturel n . Montrer que $2^{n+4} - 2^n$ est un multiple de 15.

Solution

- 1) Les multiples de 9 sont les nombres $9k$, $k \in \mathbb{N}$; ceux qui sont inférieurs à 70 sont :
0 ; 9 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 ; 54 ; 63 (car $9 \times 8 = 72 > 70$).
- 2) $2^{n+4} - 2^n = 2^n \times 2^4 - 2^n = 2^n(16 - 1) = 15 \times 2^n$, avec $2^n \in \mathbb{N}$. C’est donc un multiple de 15.

2. Plus petit commun multiple

Définition 4 : PPCM

On considère deux entiers naturels **non nuls** a et b . Le **plus petit commun multiple** de a et b est le plus petit entier naturel **non nul** qui est à la fois un multiple de a et un multiple de b .
On le note $\text{PPCM}(a; b)$ ou $a \vee b$.

Exemple 6

Déterminer $\text{PPCM}(10; 15)$.

Solution

Multiples non nuls de 10 : 10 ; 20 ; 30 ; 40 ; 50 ; 60 ; ...
Multiples non nuls de 15 : 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; ...
Les multiples communs non nuls sont 30 ; 60 ; ... Le plus petit est 30 : PPCM(10;15) = 30.

Remarque

On considère deux entiers naturels non nuls a et b .
— PPCM(a ; 1) = a et PPCM(a ; a) = a .
— PPCM(a ; b) est un multiple de a et de b , donc PPCM(a ; b) $\geq a$ et PPCM(a ; b) $\geq b$.
— Si b est un multiple de a , alors PPCM(a ; b) = b ; réciproquement, si PPCM(a ; b) = b , alors b est un multiple de a .
— Les multiples communs à a et b sont exactement les multiples de PPCM(a ; b).

Application 3

Deux phares s’allument en même temps à minuit. Le premier s’allume toutes les 12 secondes, le second toutes les 18 secondes. Au bout de combien de secondes s’allumeront-ils de nouveau en même temps pour la première fois ?

Solution

Le premier s’allume aux multiples de 12, le second aux multiples de 18. On cherche le plus petit multiple commun non nul.
Multiples de 18 : 18 ; 36 ; ... et 36 = 3 $\times$ 12 est un multiple de 12, alors que 18 n’en est pas un.
Donc PPCM(12; 18) = 36 : ils s’allument de nouveau ensemble au bout de 36 secondes.

III. Diviseurs d’un entier naturel et PGCD

1. Diviseurs d’un entier naturel

Définition 5 : Diviseur

On considère deux entiers naturels a et d , avec $d \neq 0$. On dit que d est un **diviseur** de a (ou que d **divise** a , ou que a est **divisible** par d) s’il existe un entier naturel k tel que
$$a = d \times k.$$

Remarque

— Pour $d \neq 0$: « d divise a » et « a est un multiple de d » sont deux façons de dire la même chose.
— 1 divise tout entier naturel ; tout entier naturel non nul d divise 0.
— Si $a \neq 0$ et si d divise a , alors $d \leq a$: un entier non nul n’a qu’un **nombre fini** de diviseurs.
— Si $a = x \times y$ avec $x, y \in \mathbb{N}^*$, alors x et y sont des diviseurs de a .

Méthode

Pour obtenir **tous** les diviseurs d’un entier $a \geq 1$, on cherche les produits $a = x \times y$ avec $x \leq y$: on teste les entiers $x = 1, 2, 3, \dots$ tant que $x \times x \leq a$, et chaque diviseur x trouvé donne le diviseur associé $y = \frac{a}{x}$.

Exemple 7

Déterminer les diviseurs de 36.

Solution

36 = 1 $\times$ 36 = 2 $\times$ 18 = 3 $\times$ 12 = 4 $\times$ 9 = 6 $\times$ 6 ; et 5 ne divise pas 36.
On s’arrête à $x = 6$ car 7 $\times$ 7 = 49 > 36. Les diviseurs de 36 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36.

2. Critères de divisibilité

Propriété 4 : Critères de divisibilité

Un entier naturel est divisible :

- par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
- par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Et réciproquement pour chacun de ces critères.

Exemple 8

On considère le nombre $N = 47\,250$.

- Son chiffre des unités est 0 : N est divisible par 2 et par 5.
- La somme de ses chiffres est $4 + 7 + 2 + 5 + 0 = 18$, divisible par 9 (donc aussi par 3) : N est divisible par 3 et par 9.

Application 4

Déterminer les chiffres c pour lesquels le nombre à quatre chiffres $\overline{3c27}$ est divisible par 9.

Solution

La somme des chiffres est $3 + c + 2 + 7 = 12 + c$, avec $c \in \{0; 1; \dots; 9\}$, donc $12 \leq 12 + c \leq 21$.

Le seul multiple de 9 compris entre 12 et 21 est 18 ; donc $12 + c = 18$, soit $c = 6$.

Vérification : $3627 = 9 \times 403$.

3. Plus grand commun diviseur

Définition 6 : PGCD

On considère deux entiers naturels **non nuls** a et b . Le **plus grand commun diviseur** de a et b est le plus grand entier naturel qui divise à la fois a et b . On le note $\text{PGCD}(a; b)$ ou $a \wedge b$.

Exemple 9

Déterminer $\text{PGCD}(36; 60)$.

Solution

Diviseurs de 36 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36 (exemple 7).

Diviseurs de 60 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60.

Diviseurs communs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12. Donc $\text{PGCD}(36; 60) = 12$.

Propriété 5

On considère deux entiers naturels non nuls a et b .

- $\text{PGCD}(a; b) \geq 1$, $\text{PGCD}(a; 1) = 1$ et $\text{PGCD}(a; a) = a$.
- $\text{PGCD}(a; b) \leq a$ et $\text{PGCD}(a; b) \leq b$.
- Si a divise b , alors $\text{PGCD}(a; b) = a$; réciproquement, si $\text{PGCD}(a; b) = a$, alors a divise b .
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\text{PGCD}(ka; kb) = k \times \text{PGCD}(a; b)$.
- Si $d = \text{PGCD}(a; b)$, alors il existe deux entiers naturels non nuls α et β tels que

$$a = d\alpha, \quad b = d\beta \quad \text{et} \quad \text{PGCD}(\alpha; \beta) = 1.$$

Application 5

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a; b)$, avec $a < b$, tels que $\text{PGCD}(a; b) = 6$ et $a + b = 48$.

Solution

D'après la propriété 5, $a = 6\alpha$ et $b = 6\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ et $\text{PGCD}(\alpha; \beta) = 1$.

$a + b = 48$ donne $6(\alpha + \beta) = 48$, soit $\alpha + \beta = 8$, avec $\alpha < \beta$.

Les possibilités sont $(\alpha; \beta) \in \{(1; 7); (2; 6); (3; 5)\}$. Or $\text{PGCD}(2; 6) = 2 \neq 1$: on l'écarte.

Vérification : $\text{PGCD}(6; 42) = 6$ et $\text{PGCD}(18; 30) = 6$. Les couples cherchés sont $(6; 42)$ et $(18; 30)$.

4. Nombres premiers entre eux**Définition 7**

On dit que deux entiers naturels non nuls a et b sont **premiers entre eux** si $\text{PGCD}(a; b) = 1$, c'est-à-dire si leur seul diviseur commun est 1.

Exemple 10

- 8 et 15 sont premiers entre eux : les diviseurs de 8 sont 1, 2, 4, 8 et aucun d'eux, sauf 1, ne divise 15.
- 14 et 21 ne sont pas premiers entre eux, car 7 divise 14 et 21.

Remarque

- Deux entiers naturels consécutifs non nuls n et $n + 1$ sont toujours premiers entre eux (un diviseur commun divise leur différence 1).
- Une fraction $\frac{a}{b}$ (avec $a, b \in \mathbb{N}^*$) est **irréductible** lorsque a et b sont premiers entre eux. Pour la rendre irréductible, on divise a et b par $\text{PGCD}(a; b)$: par exemple $\frac{36}{60} = \frac{36 \div 12}{60 \div 12} = \frac{3}{5}$.

IV. Nombres premiers**1. Définition****Définition 8 : Nombre premier**

Un entier naturel est dit **premier** s'il admet **exactement deux** diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple 11

- 13 est premier : ses seuls diviseurs sont 1 et 13.
- 21 n'est pas premier, car $21 = 3 \times 7$.
- 0 et 1 ne sont pas premiers : 1 n'a qu'un seul diviseur, et 0 en a une infinité.

Remarque

- 2 est le seul nombre premier pair.
- Les nombres premiers inférieurs à 40 sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37.
- Si $a = x \times y$ avec $x \neq 1$ et $y \neq 1$ (et $x, y \in \mathbb{N}$), alors a n'est pas premier.
- Il existe une infinité de nombres premiers.

2. Reconnaître un nombre premier**Propriété 6 : Test de primalité**

On considère un entier naturel $a \geq 2$.

- Si a n'est divisible par **aucun** nombre premier p vérifiant $p \times p \leq a$, alors a est premier.
- Si a est divisible par l'un de ces nombres premiers (et a n'est pas lui-même ce nombre), alors a n'est pas premier.

Remarque

La condition $p \times p \leq a$ s'écrit aussi $p \leq \sqrt{a}$. Ce test découle du **crible d'Ératosthène** : pour obtenir les nombres premiers jusqu'à 100, on écrit les entiers de 2 à 100, puis on barre les multiples de 2 (sauf 2), de 3 (sauf 3), de 5 et de 7 ; les nombres restants sont premiers (on s'arrête à 7 car $11 \times 11 = 121 > 100$).

Exemple 12

Le nombre 127 est-il premier ?

Solution

$11 \times 11 = 121 \leq 127 < 169 = 13 \times 13$: on teste les nombres premiers 2, 3, 5, 7 et 11.

— 127 est impair ; la somme de ses chiffres est 10 : non divisible par 3 ; il ne se termine ni par 0 ni par 5.

— $127 = 7 \times 18 + 1$ et $127 = 11 \times 11 + 6$: non divisible par 7 ni par 11.

Donc 127 est un nombre premier.

Application 6

Déterminer, parmi les nombres 83 ; 119 ; 133 ; 149, ceux qui sont premiers.

Solution

— $83 : 9 \times 9 = 81 \leq 83 < 100$; on teste 2, 3, 5, 7 : aucun ne divise 83. Donc 83 est premier.

— $119 = 7 \times 17$: non premier.

— $133 = 7 \times 19$: non premier.

— $149 : 12 \times 12 = 144 \leq 149 < 169$; on teste 2, 3, 5, 7, 11 : $149 = 7 \times 21 + 2 = 11 \times 13 + 6$, la somme des chiffres vaut 14. Aucun ne divise 149 : il est premier.

V. Décomposition en produit de facteurs premiers

1. Théorème fondamental

Théorème 1 : Décomposition

Tout entier naturel $a \geq 2$ qui n’est pas premier s’écrit comme un **produit de nombres premiers**. Cette écriture est **unique**, à l’ordre des facteurs près. On la présente sous forme de produit de puissances de nombres premiers :

$$a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}.$$

Exemple 13

$60 = 2^2 \times 3 \times 5 ; \quad 98 = 2 \times 7^2 ; \quad 1000 = 2^3 \times 5^3.$

2. Méthode pratique

Méthode

Pour décomposer un entier $a \geq 2$:

1) on divise a par son plus petit diviseur premier p_1 ;

2) on recommence avec le quotient obtenu ;

3) on s’arrête lorsque le quotient vaut 1.

L’entier a est alors le produit de tous les diviseurs premiers utilisés. On présente les calculs dans un tableau à deux colonnes (quotients à gauche, diviseurs premiers à droite).

Exemple 14

Décomposer 1260 en produit de facteurs premiers.

Solution

Quotient	1260	630	315	105	35	7	1
Diviseur premier	2	2	3	3	5	7	

Donc $1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$.

3. Applications de la décomposition

Théorème 2 : PGCD et PPCM

On considère deux entiers naturels $a \geq 2$ et $b \geq 2$ décomposés en produits de facteurs premiers.

- $\text{PGCD}(a; b)$ est le produit des facteurs premiers **communs** aux deux décompositions, chacun affecté du **plus petit** exposant.
- $\text{PPCM}(a; b)$ est le produit de **tous** les facteurs premiers apparaissant dans l'une ou l'autre décomposition, chacun affecté du **plus grand** exposant.

Exemple 15

On considère $a = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $b = 2 \times 3^3 \times 7$. Déterminer $\text{PGCD}(a; b)$ et $\text{PPCM}(a; b)$.

Solution

Facteurs communs : 2 et 3, avec les plus petits exposants 1 et 2 : $\text{PGCD}(a; b) = 2 \times 3^2 = 18$.

Tous les facteurs, avec les plus grands exposants : $\text{PPCM}(a; b) = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 7560$.

Propriété 7

Pour tous entiers naturels non nuls a et b :

$$\text{PGCD}(a; b) \times \text{PPCM}(a; b) = a \times b.$$

Remarque

La décomposition en facteurs premiers sert aussi à :

- **simplifier une fraction** : on supprime les facteurs communs au numérateur et au dénominateur ;
- **simplifier une racine carrée** : on regroupe les facteurs premiers par paires, puisque $\sqrt{p^2} = p$;
- reconnaître un **carré parfait** (carré d'un entier naturel) : tous les exposants de sa décomposition sont pairs.

Application 7

On considère les entiers $a = 756$ et $b = 1176$.

- 1) Décomposer a et b en produits de facteurs premiers.
- 2) En déduire $\text{PGCD}(a; b)$ et $\text{PPCM}(a; b)$, puis vérifier la propriété 7.
- 3) Écrire $\frac{a}{b}$ sous forme irréductible.
- 4) Simplifier $\sqrt{a \times b}$.

Solution

- 1) $756 = 2 \times 378 = 2^2 \times 189 = 2^2 \times 3^3 \times 7$;
 $1176 = 2 \times 588 = 2^2 \times 294 = 2^3 \times 147 = 2^3 \times 3 \times 7^2$.
- 2) $\text{PGCD}(a; b) = 2^2 \times 3 \times 7 = 84$;
 $\text{PPCM}(a; b) = 2^3 \times 3^3 \times 7^2 = 10\,584$.
Vérification : $84 \times 10\,584 = 889\,056$ et $756 \times 1176 = 889\,056$.
- 3) $\frac{a}{b} = \frac{2^2 \times 3^3 \times 7}{2^3 \times 3 \times 7^2} = \frac{3^2}{2 \times 7} = \frac{9}{14}$.
- 4) $a \times b = 2^5 \times 3^4 \times 7^3 = (2^2 \times 3^2 \times 7)^2 \times 2 \times 7$, donc

$$\sqrt{a \times b} = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times \sqrt{14} = 252\sqrt{14}.$$

Application 8 : carré parfait

Déterminer le plus petit entier naturel non nul m tel que $540m$ soit un carré parfait.

Solution

$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$. Pour que tous les exposants deviennent pairs, il faut multiplier au minimum par $3 \times 5 = 15$.
Donc $m = 15$ et $540 \times 15 = 8100 = 90^2$.

À retenir — l’essentiel du chapitre

- n pair : $n = 2k$; n impair : $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$). Le produit de deux entiers consécutifs est pair.
- d divise $a \iff a$ est un multiple de $d \iff$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = dk$ ($d \neq 0$).
- Critères : 2 et 5 (chiffre des unités) ; 3 et 9 (somme des chiffres).
- Un nombre premier a exactement deux diviseurs. Test : diviseurs premiers p avec $p \times p \leq a$.
- PGCD : facteurs communs, plus petits exposants ; PPCM : tous les facteurs, plus grands exposants ;
 $\text{PGCD}(a; b) \times \text{PPCM}(a; b) = ab$.