

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 09

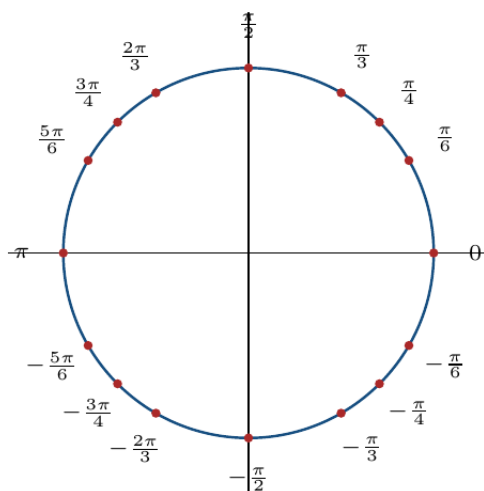
Trigonométrie 1

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1

On ramène chaque abscisse à sa valeur principale, puis on place le point :

- π ; $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{2}$ (déjà principales) ;
- $\frac{7\pi}{6} \equiv -\frac{5\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3}$; $\frac{17\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}$; $\frac{23\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{6}$; $-\frac{15\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.



Exercice 2

- 1) $\frac{37\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 6\pi : \frac{\pi}{6}$.
- 2) $-\frac{125\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - 32\pi : \frac{3\pi}{4}$.
- 3) $19\pi = \pi + 18\pi : \pi$.
- 4) $\frac{103\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 34\pi : \frac{\pi}{3}$.
- 5) $-\frac{47\pi}{5} = \frac{3\pi}{5} - 10\pi : \frac{3\pi}{5}$.
- 6) $\frac{89\pi}{7} = \frac{5\pi}{7} + 12\pi : \frac{5\pi}{7}$.

Exercice 3

- 1) $x - y = \frac{72\pi}{12} = 6\pi = 2 \times 3\pi : x \equiv y [2\pi]$.
- 2) $x - y = -\frac{40\pi}{8} = -5\pi$, qui n'est pas un multiple pair de $\pi : x \not\equiv y [2\pi]$.

Exercice 4

On utilise $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200}$.

En degrés	30	72	135	162	18	225
En radians	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{10}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{5\pi}{4}$
En grades	$\frac{100}{3}$	80	150	180	20	250

Exercice 5

- $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} : (\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}}) \equiv \pi$.
- $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD} : (\widehat{\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}}) \equiv \frac{\pi}{2} + \pi \equiv -\frac{\pi}{2}$.
- La diagonale $[AC]$ est bissectrice de l'angle droit $\widehat{BAD} : (\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{4}$.
- $(\widehat{\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BD}})$: la diagonale $[BD]$ est bissectrice de $\widehat{ABC}$, et on tourne de $\overrightarrow{BA}$ vers $\overrightarrow{BD}$ dans le sens indirect : $-\frac{\pi}{4}$.

Exercice 6

Dans un triangle équilatéral direct : $(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{3}$.

- 1) $(\widehat{\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CA}})$. Or $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, donc $(\widehat{\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}$ (les deux vecteurs sont changés en leurs opposés). Ainsi $(\widehat{\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CA}}) \equiv \frac{2\pi}{3}$.
- 2) $(JK) \parallel (BC)$ (droite des milieux) avec $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} : (\widehat{\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{JK}}) \equiv \pi$.
- 3) (AI) est la bissectrice de $\widehat{BAC} : (\widehat{\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{6}$. Puis $(\widehat{\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{CA}}) \equiv \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6} \equiv -\frac{5\pi}{6}$.

Exercice 7

- $(\widehat{\overrightarrow{v}; \overrightarrow{u}}) \equiv -\frac{\pi}{3} ; (\widehat{2\overrightarrow{u}; 3\overrightarrow{v}}) \equiv \frac{\pi}{3} ; (\widehat{\overrightarrow{u}; -\overrightarrow{v}}) \equiv \frac{\pi}{3} + \pi \equiv -\frac{2\pi}{3} ;$
- $(\widehat{-2\overrightarrow{v}; 5\overrightarrow{u}}) \equiv -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} ; (\widehat{-\overrightarrow{u}; -\overrightarrow{v}}) \equiv \frac{\pi}{3} ; (\widehat{-3\overrightarrow{v}; -\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}) \equiv -\frac{\pi}{3}.$

Exercice 8

$OM = OM' = 1$ et l'angle $\widehat{MOM'}$ mesure $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$: le triangle isocèle OMM' a un angle de 60° , il est donc équilatéral et $MM' = 1$.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, $M(\cos \frac{\pi}{6}; \sin \frac{\pi}{6})$ et $M'(\cos \frac{\pi}{6}; -\sin \frac{\pi}{6})$, donc $MM' = 2 \sin \frac{\pi}{6}$ (le sinus étant positif). Ainsi $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Enfin $\cos^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et $\cos \frac{\pi}{6} > 0$, d'où $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 9

- $\cos \frac{25\pi}{3} = \cos(\frac{\pi}{3} + 8\pi) = \frac{1}{2}$.
- $\sin(-\frac{31\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4} - 8\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\tan \frac{17\pi}{6} = \tan(-\frac{\pi}{6} + 3\pi) = \tan(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 10

- 1) $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + (2 - \sqrt{3})^2 = 8 - 4\sqrt{3}$, donc $\cos^2 x = \frac{1}{8 - 4\sqrt{3}} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{64 - 48} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$. Comme $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos x > 0$:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

- 2) $\cos^2 y = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$. Pour $y \in]-\pi; -\frac{\pi}{2}[$, le point est dans le troisième quadrant : $\cos y < 0$, donc $\cos y = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.
 Puis $\tan y = \frac{-2/3}{-\sqrt{5}/3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3) On pose $X = \tan z : X^2 - (1 + \sqrt{3})X + \sqrt{3} = (X - 1)(X - \sqrt{3}) = 0$, donc $\tan z = 1$ ou $\tan z = \sqrt{3}$. Dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[: z = \frac{\pi}{4}$ ou $z = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 11

$$1) 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$2) 1 + \frac{1}{\tan^2 x} = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Exercice 12

Méthode 1. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x.$

Méthode 2. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x.$

Exercice 13

$$- \cos\left(\frac{\pi}{4} + 7\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$- \sin\left(\frac{\pi}{6} - 51\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi - 52\pi\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$- \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 2027\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi - 2028\pi + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

$$- \tan\left(\frac{\pi}{3} + 2026\pi\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Exercice 14

1)

$$- A = -\cos x + \sin(\pi - x) - \cos x + \sin x = -\cos x + \sin x - \cos x + \sin x = 2\sin x - 2\cos x.$$

$$- B = \cos x - \sin x + \sin(\pi + x) = \cos x - 2\sin x.$$

$$- \cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} - 4\pi\right) = -\sin x \text{ et } \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x : C = \cos x - \sin x.$$

2)

$$- \tan(9\pi - x) = \tan(-x) = -\tan x \text{ et } \tan(5\pi + x) = \tan x : E = 0.$$

$$- \tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x + 3\pi\right) = \frac{1}{\tan x} \text{ et } \tan(x - 3\pi) = \tan x : F = 1.$$

Exercice 15

Les six sommets partagent le cercle en six arcs égaux : chaque angle au centre $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, ... mesure $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

1) Longueur de $\widehat{AB} : r\theta = 3 \times \frac{\pi}{3} = \pi.$

2) B et F sont séparés par deux arcs (F, A, B) : $\widehat{BOF} = \frac{2\pi}{3}$, longueur $3 \times \frac{2\pi}{3} = 2\pi.$

3) Aire du secteur : $\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 9 \times \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}.$