

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 08

Équations, inéquations et systèmes

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1

1)

$$— 4x - 10 = 0 \iff x = \frac{5}{2}.$$

$$— 3 - 2x = \sqrt{3}x + \sqrt{3} \iff (2 + \sqrt{3})x = 3 - \sqrt{3} \iff x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = (3 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 9 - 5\sqrt{3}.$$

$$— \text{En multipliant par 6 : } 3(x - 1) - 2(2x + 1) = 6x + 6 \iff -x - 5 = 6x + 6 \iff x = -\frac{11}{7}.$$

$$— (2x + 1)^2 = (x - 3)^2 \iff 2x + 1 = x - 3 \text{ ou } 2x + 1 = -x + 3 \iff x = -4 \text{ ou } x = \frac{2}{3}.$$

$$— 9x^2 = 49 \iff x = \frac{7}{3} \text{ ou } x = -\frac{7}{3}. \quad x^2 + 5x = 0 \iff x(x + 5) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -5.$$

$$— \text{Valeurs interdites 2 et -4 : } \frac{1}{x - 2} = \frac{3}{x + 4} \iff x + 4 = 3x - 6 \iff x = 5; S = \{5\}.$$

$$— (x - 1)(2x + 3) - (x - 1)(x + 5) = 0 \iff (x - 1)(x - 2) = 0 : S = \{1; 2\}.$$

$$— |x - 3| = |2x| \iff x - 3 = 2x \text{ ou } x - 3 = -2x \iff x = -3 \text{ ou } x = 1.$$

2)

$$— (E_1) : \text{si } m \neq -1, x = \frac{(m - 1)(m + 1)}{m + 1} = m - 1; \text{ si } m = -1, 0x = 0 \text{ et } S = \mathbb{R}.$$

$$— (E_2) \iff (m - 2)x = m + 3 : \text{ si } m \neq 2, S = \left\{ \frac{m + 3}{m - 2} \right\}; \text{ si } m = 2, 0x = 5 \text{ et } S = \emptyset.$$

$$— (E_3) : m^2 - 9 = (m - 3)(m + 3). \text{ Si } m \neq 3 \text{ et } m \neq -3 : S = \left\{ \frac{1}{m + 3} \right\}; \text{ si } m = 3 : 0x = 0, S = \mathbb{R}; \text{ si } m = -3 : 0x = -6, S = \emptyset.$$

Exercice 2

1)

$$— 3x - 9 \leq 0 \iff x \leq 3 : S =] - \infty; 3]. \quad -2x + 1 > x + 7 \iff -3x > 6 \iff x < -2 : S =] - \infty; -2[.$$

$$— \times 12 : 4(2x - 1) - 3(x + 2) \geq 12 \iff 5x \geq 22 \iff x \geq \frac{22}{5} : S = \left[\frac{22}{5}; +\infty[.$$

$$— |x| < 4 \iff x \in] - 4; 4[. \quad |3x - 2| \geq 1 \iff 3x - 2 \leq -1 \text{ ou } 3x - 2 \geq 1 : S = \left] -\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty[.$$

2)

$$— (I_1) : m^2 + 1 > 0, \text{ donc } S = \left] -\infty; \frac{m - 1}{m^2 + 1} \right] \text{ pour tout } m.$$

$$— (I_2) : m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1). \text{ Si } m > 1 : x < m + 1, S =] - \infty; m + 1[. \text{ Si } m < 1 : \text{ on divise par } m - 1 < 0, x > m + 1, S =]m + 1; +\infty[. \text{ Si } m = 1 : 0 < 0 \text{ est faux, } S = \emptyset.$$

$$— (I_3) : \text{ si } m < 2, x \geq 1; \text{ si } m > 2, x \leq 1; \text{ si } m = 2, 0 \geq 0 \text{ et } S = \mathbb{R}.$$

Exercice 3

1)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$-3x+6$		+		+	0	-	
$\frac{1}{2x-1}$		-		+		+	
$\frac{-3x+6}{2x-1}$		-		+	0	-	

2) On dresse dans chaque cas un tableau de signes.

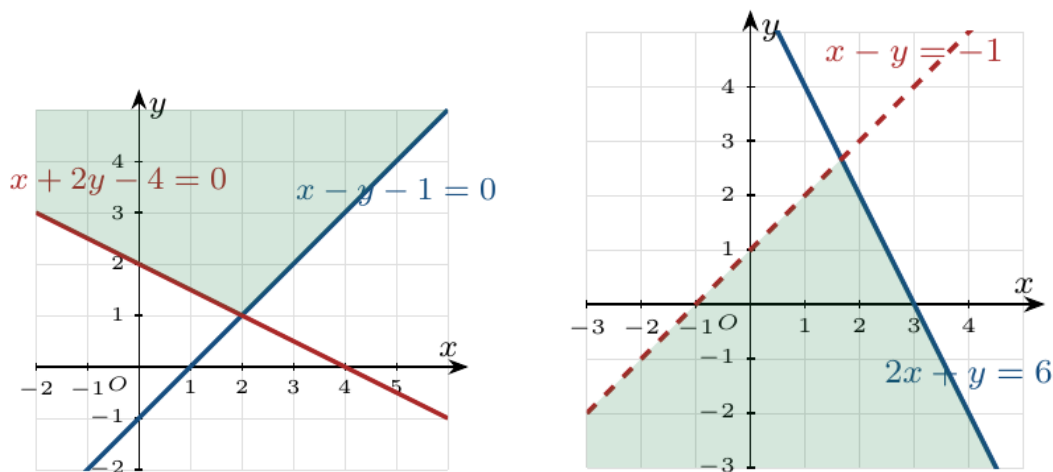
- $(x-2)(3-x) \geq 0 : S = [2; 3]$. $(3x+1)(2x-4) < 0 : S =]-\frac{1}{3}; 2[$. $\frac{x+1}{x-3} \leq 0 : S = [-1; 3[$.
- $\frac{(x-1)(2x+5)}{4-x} \geq 0$: racines $-\frac{5}{2}$ et 1, valeur interdite 4; le quotient est positif sur $] -\infty; -\frac{5}{2}]$ et sur $[1; 4[$.
 $S =]-\infty; -\frac{5}{2}] \cup [1; 4[$.
- $x^2 - 3x = x(x-3) \leq 0 : S = [0; 3]$.
- $(x-2)^2 \geq 0$ s'annule en 2; $1-x \geq 0 \iff x \leq 1$. $S =]-\infty; 1] \cup \{2\}$.

Exercice 4

- A.** 1) $D = -2 - 15 = -17$, $D_x = -8 - 9 = -17$, $D_y = 6 - 40 = -34 : S = \{(1; 2)\}$.
- 2) $D = 6 - 6 = 0$. La 2^e équation s'écrit $x - 2y = -\frac{4}{3}$, incompatible avec $x - 2y = 1 : S = \emptyset$.
- 3) $D = -\frac{4}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{11}{6}$, $D_x = \frac{2}{3} - 3 = -\frac{7}{3}$, $D_y = 12 + 1 = 13 : x = \frac{14}{11}$, $y = -\frac{78}{11}$.
- 4) $D = 4 - 4 = 0$; la 2^e équation est la 1^{re} multipliée par $-2 : S = \{(x; 2x-3) / x \in \mathbb{R}\}$ (infinité de solutions).
- B.** 1) $D = -1 - 6 = -7$, $D_x = -5 - 2 = -7$, $D_y = 1 - 15 = -14 : S_1 = \{(1; 2)\}$.
- 2) On pose $X = x^2$ et $Y = |y|$ (positifs). Le système devient (S_1) en $(X; Y)$, donc $x^2 = 1$ et $|y| = 2$.
 $S_2 = \{(1; 2); (1; -2); (-1; 2); (-1; -2)\}$.
- C.** Conditions : $x \geq -1$ et $y \geq 2$. On pose $X = \sqrt{x+1}$ et $Y = \sqrt{y-2} : \begin{cases} 2X + Y = 7 \\ X - 3Y = -7 \end{cases}$, $D = -7$,
 $D_X = -21 + 7 = -14$, $D_Y = -14 - 7 = -21 : X = 2$, $Y = 3$ (positifs). Donc $x+1 = 4$, $y-2 = 9 : S = \{(3; 11)\}$.
- D.** 1) $D = 1 + 2 = 3$, $D_x = 1 + 5 = 6$, $D_y = 5 - 2 = 3 : S = \{(2; 1)\}$.
- 2) a) Avec $X = \frac{1}{x}$, $Y = \frac{1}{y}$ (x, y non nuls) : $X = 2$, $Y = 1$, donc $S = \left\{\left(\frac{1}{2}; 1\right)\right\}$.
- b) Avec $X = \sqrt{x}$, $Y = \sqrt{y}$ (x, y positifs) : $\sqrt{x} = 2$, $\sqrt{y} = 1$, donc $S = \{(4; 1)\}$.
- E.** 1) $D = m \times m - 1 \times 1 = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$.
- 2) $D_x = 2m - (m+1) = m-1$ et $D_y = m(m+1) - 2 = m^2 + m - 2 = (m-1)(m+2)$.
- Si $m \neq 1$ et $m \neq -1 : x = \frac{1}{m+1}$, $y = \frac{m+2}{m+1}$.
 - Si $m = 1$: les deux équations s'écrivent $x + y = 2 : S = \{(x; 2-x) / x \in \mathbb{R}\}$.
 - Si $m = -1$: $-x + y = 2$ et $x - y = 0$ sont incompatibles : $S = \emptyset$.

Exercice 5

- 1) $x - y - 1 \leq 0 : O$ vérifie $-1 \leq 0$, donc les solutions forment le demi-plan fermé de bord $x - y - 1 = 0$ contenant O . $x + 2y - 4 \geq 0 : O$ donne $-4 \geq 0$, faux; les solutions forment le demi-plan fermé de bord $x + 2y - 4 = 0$ ne contenant pas O .
- 2) Les solutions de (S_1) forment l'intersection des deux demi-plans précédents (figure de gauche; les deux droites se coupent en $(2; 1)$). Pour $(S_2) : O$ vérifie $0 \leq 6$ et $0 > -1$; les solutions sont les points du côté de O par rapport aux deux droites, la droite $x - y = -1$ étant exclue (pointillés), figure de droite.



Exercice 6

- 1) $x(5x + 3) = 0 : S = \left\{0; -\frac{3}{5}\right\}$. 2) $x^2 = 4 : S = \{-2; 2\}$. 3) $(x - 2)(x - m) = x^2 - (m + 2)x + 2m$, donc l'équation équivaut à $(x - 2)(x - m) = 0$: si $m \neq 2$, $S = \{2; m\}$; si $m = 2$, $S = \{2\}$.
 4) $(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{3}) = x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} : S = \{\sqrt{2}; \sqrt{3}\}$. 5) Avec $X = 2x - 1 : X^2 - 5X = X(X - 5) = 0$, donc $2x - 1 = 0$ ou $2x - 1 = 5 : S = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$.

Exercice 7

- 1) $\Delta = 25 + 24 = 49 : x = \frac{5 \pm 7}{6}$, $S = \left\{-\frac{1}{3}; 2\right\}$.
 2) $\Delta = 0 : S = \{5\}$. 3) $\Delta = 1 - 24 = -23 < 0 : S = \emptyset$.
 4) $-(x^2 - 2\sqrt{3}x + 3) = -(x - \sqrt{3})^2 : S = \{\sqrt{3}\}$.
 5) Avec $X = |x| \geq 0 : X^2 - 3X + 2 = 0$, $X = 1$ ou $X = 2$. $S = \{-2; -1; 1; 2\}$.
 6) Avec $X = x^2 \geq 0 : X^2 - X - 6 = 0$, $X = 3$ ou $X = -2$ (rejeté). $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.
 7) On travaille dans $[0; +\infty[$, où $\sqrt{x}$ est défini. Avec $X = \sqrt{x} \geq 0 : 2X^2 - 7X + 3 = 0$, $\Delta = 25$, $X = 3$ ou $X = \frac{1}{2}$.
 $S = \left\{\frac{1}{4}; 9\right\}$.
 8) On travaille dans $[-1; +\infty[$, où $\sqrt{x+1}$ est défini. De plus, une racine carrée étant positive, il faut $x - 1 \geq 0$, soit $x \geq 1$. Alors $\sqrt{x+1} = x - 1 \iff x + 1 = (x - 1)^2 \iff x^2 - 3x = 0 \iff x = 0$ ou $x = 3$. Seul 3 vérifie $x \geq 1 : S = \{3\}$.

Exercice 8

- 1) Pour $x = 0 : 2 \neq 0$.
 2) Pour $x \neq 0$, on divise par $x^2 : (E) \iff 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0$. Or $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, donc
 $(E) \iff 2t^2 - 4 - 7t + 9 = 0 \iff 2t^2 - 7t + 5 = 0$.
 3) $\Delta = 49 - 40 = 9 : t = 1$ ou $t = \frac{5}{2}$.
 — $x + \frac{1}{x} = 1 \iff x^2 - x + 1 = 0 : \Delta = -3$, pas de solution.
 — $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \iff 2x^2 - 5x + 2 = 0 : \Delta = 9$, $x = 2$ ou $x = \frac{1}{2}$.
 $S = \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$.

Exercice 9

A. 1) $\Delta = 5 + 24 = 29 > 0$: deux solutions distinctes.

2) $S = x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}$ et $P = x_1x_2 = -\frac{2}{3}$.

$$- \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P} = -\frac{\sqrt{5}}{2}; \quad x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = PS = -\frac{2\sqrt{5}}{9}.$$

$$- x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = \frac{5}{9} + \frac{4}{3} = \frac{17}{9}; \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{P} = -\frac{17}{6}.$$

$$- x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS = \frac{5\sqrt{5}}{27} + \frac{2\sqrt{5}}{3} = \frac{23\sqrt{5}}{27}.$$

B. $\Delta = 196 - 100 = 96 > 0$; $\alpha\beta = \frac{1}{25} > 0$ et $\alpha + \beta = \frac{14}{25} > 0$: les deux solutions sont strictement positives.

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = \frac{14}{25} + \frac{2}{5} = \frac{24}{25}, \text{ donc } \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \frac{2\sqrt{6}}{5}. \text{ Ainsi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{2\sqrt{6}/5}{1/5} = 2\sqrt{6}.$$

Exercice 10

— P_1 : $\Delta = 49$, racines $\frac{1}{3}$ et -2 : $P_1(x) = (3x - 1)(x + 2)$.

— P_2 : $\Delta = 1$, racines 1 et $\frac{3}{2}$: $P_2(x) = -2(x - 1)\left(x - \frac{3}{2}\right) = -(x - 1)(2x - 3)$.

— $P_3(x) = (3x - 2)^2$.

— P_4 : $\Delta = 8 - 12 < 0$ et P_5 : $\Delta = -3 < 0$; ils ne se factorisent pas.

— P_6 : avec $X = x^2$, $2X^2 - 5X - 3 = (2X + 1)(X - 3)$, donc $P_6(x) = (2x^2 + 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.

Exercice 11

A.

1) Racines 2 et 3, $a > 0$: $P(x) > 0$ sur $] -\infty; 2[\cup]3; +\infty[$, $P(x) < 0$ sur $]2; 3[$.

2) $P(x) = -(x - 2)^2$: négatif, nul en 2.

3) Racines $-\frac{1}{2}$ et 1, $a < 0$: $P(x) > 0$ sur $] -\frac{1}{2}; 1[$, $P(x) < 0$ à l'extérieur.

4) $\Delta = -8 < 0$, $a > 0$: $P(x) > 0$ pour tout réel x .

5) $P(x) = 4x(x + 2)$: positif sur $] -\infty; -2[\cup]0; +\infty[$, négatif sur $] -2; 0[$.

B.

— $S =] -\infty; 2[\cup]3; +\infty[$; $S = \mathbb{R} \setminus \{2\} =] -\infty; 2[\cup]2; +\infty[$; $S = \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$; $S = \emptyset$.

— Pour le quotient (valeurs interdites -2 et 0) :

x	$-\infty$		-2		0		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		+		+		+	0	−	0	+	
$4x^2 + 8x$		+	0	−	0	+		+		+	
quotient		+		−		+	0	−	0	+	

$$S =] -2; 0[\cup]2; 3[.$$

Exercice 12

1) a) $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) \geq 0 \iff x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3$: $D =] -\infty; 2] \cup [3; +\infty[$.

b) Si $x < 0$: une racine carrée est positive, (E) n'a pas de solution. Si $x \geq 0$ (et $x \in D$) : les deux membres sont positifs, donc $(E) \iff x^2 - 5x + 6 = x^2 \iff x = \frac{6}{5}$. Or $\frac{6}{5} \geq 0$ et $\frac{6}{5} \leq 2$, donc $\frac{6}{5} \in D$: $S = \left\{\frac{6}{5}\right\}$.

2) Dans D : si $x < 0$, l'inéquation est vraie (racine positive, x négatif) ; si $x \geq 0$, les deux membres sont positifs et elle équivaut à $x^2 - 5x + 6 > x^2$, soit $x < \frac{6}{5}$. Comme $] -\infty; 0[$ et $\left[0; \frac{6}{5}\right[$ sont contenus dans $D : S =] -\infty; \frac{6}{5}[$.

Exercice 13

- 1) $t^2 + 7t + 10 = (t + 2)(t + 5) : S = \{(-2; -5); (-5; -2)\}$.
- 2) $t^2 - 3t - 10 = (t - 5)(t + 2) : S = \{(5; -2); (-2; 5)\}$.
- 3) $(x + y)^2 = 13 + 12 = 25$, donc $x + y = 5$ ou $x + y = -5$, avec $xy = 6 : t^2 - 5t + 6 = 0$ ou $t^2 + 5t + 6 = 0$.
 $S = \{(2; 3); (3; 2); (-2; -3); (-3; -2)\}$.
- 4) On pose $s = x + y : x^3 + y^3 = s^3 - 3xys = s^3 - 18s = 35$. $s = 5$ convient et $s^3 - 18s - 35 = (s - 5)(s^2 + 5s + 7)$ avec $\Delta = 25 - 28 < 0 : s = 5$. $t^2 - 5t + 6 = 0 : S = \{(2; 3); (3; 2)\}$.
- 5) $s = x + y$ et $p = xy : s + p = 11$ et $sp = 30$; donc s et p sont solutions de $T^2 - 11T + 30 = 0 : (s; p) = (5; 6)$ ou $(6; 5)$. Puis $t^2 - 5t + 6 = 0$ ou $t^2 - 6t + 5 = 0 : S = \{(2; 3); (3; 2); (1; 5); (5; 1)\}$.
- 6) $x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 9 - xy = 7$, donc $xy = 2 : t^2 - 3t + 2 = 0, S = \{(1; 2); (2; 1)\}$.