

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 07

Polynômes

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1

- A est un polynôme de degré 4.
- $C(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$ est un polynôme de degré 3.
- E est un polynôme de degré 2 (coefficients π et $-\frac{1}{2}$).
- B , D et F ne sont pas des polynômes (présence de $\frac{1}{x}$, de $|x|$ et de $\sqrt{x}$).

Exercice 2

$(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$, donc $Q(x) = (x^2 - x - 2)(ax + b) = ax^3 + (b-a)x^2 + (-2a-b)x - 2b$.

Par identification : $a = 3$; $b - a = -4$ donc $b = -1$; on vérifie $-2a - b = -6 + 1 = -5$ et $-2b = 2$. Donc $a = 3$ et $b = -1$.

Exercice 3

1) $P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} - 2 = 0$.

2) Q est de degré 1 : $Q(x) = ax + b$, et $\left(x - \frac{1}{3}\right)(ax + b) = ax^2 + \left(b - \frac{a}{3}\right)x - \frac{b}{3}$. Par identification : $a = 3$, $-\frac{b}{3} = -2$ donc $b = 6$ (et $6 - 1 = 5$). $Q(x) = 3x + 6$.

3) $P(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)(3x + 6)$; l'autre racine est -2 .

Exercice 4

1) $Q(1) = 1 - 4 + 3 = 0$: Q est divisible par $x - 1$.

2) $(x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$; identification : $a = 1$, $b = 1$, $c = -3$. $R(x) = x^2 + x - 3$.

Exercice 5

1) a) $P(2) = 8 + 8 - 10 - 6 = 0$. b) $P(-1) = 1 - 1 + 3 - 3 = 0$. c) $P(-3) = -27 + 21 + 6 = 0$. Dans chaque cas $P(a) = 0$, donc P est divisible par $x - a$.

2) $P(1) = 1 + 1 + a + b - 6 = a + b - 4$ et $P(-2) = 16 - 8 + 4a - 2b - 6 = 4a - 2b + 2$. On résout $a + b = 4$ et $2a - b = -1$: en additionnant, $3a = 3$, donc $a = 1$ et $b = 3$.

Exercice 6

1) On écrit $P(x) = (x-a)(x^2 + px + q) + r$ (avec le coefficient dominant convenable) et on identifie.

- a) $P(x) = (x+2)(x^2 - 1) + 7$: quotient $x^2 - 1$, reste $7 = P(-2)$.
- b) $P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 4) + 1$: quotient $2x^2 + 4$, reste 1.
- c) $P(x) = (x-2)(x^2 + 2x - 1) - 1$: quotient $x^2 + 2x - 1$, reste -1 .

2) a)

	3	-4	1	-5
2		6	4	10
	3	2	5	5

Quotient $3x^2 + 2x + 5$, reste 5.

b)

	1	-2	0	3	-10
-2		-2	8	-16	26
	1	-4	8	-13	16

Quotient $x^3 - 4x^2 + 8x - 13$, reste 16.

c)

	2	1	0	-3	7
-1		-2	1	-1	4
	2	-1	1	-4	11

Quotient $2x^3 - x^2 + x - 4$, reste 11.

Exercice 7

- 1) $P(-1) = -1 - 1 - (m - 5) + 3 = 6 - m$: -1 est racine si et seulement si $m = 6$.
- 2) $P(1) = 1 - 1 + m - 5 + 3 = m - 2$: P est divisible par $x - 1$ si et seulement si $m = 2$.
- 3) a) $P(x) = x^3 - x^2 - 3x + 3 = x^2(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 3)$, donc $Q(x) = x^2 - 3$.
- b) $Q(\sqrt{3}) = 3 - 3 = 0$. $P(x) = (x - 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.

Exercice 8

- 1) $P(-3) = -54 + 27 + 33 - 6 = 0$.
- 2) Horner avec $a = -3$: coefficients 2 ; $3 - 6 = -3$; $-11 + 9 = -2$; $-6 + 6 = 0$. Donc $Q(x) = 2x^2 - 3x - 2$.
- 3) $Q(2) = 8 - 6 - 2 = 0$: Q est divisible par $x - 2$.
- 4) $Q(x) = (x - 2)(2x + 1)$ (identification : $(x - 2)(2x + c) = 2x^2 + (c - 4)x - 2c$ avec $c = 1$).
- 5) $P(x) = (x + 3)(x - 2)(2x + 1)$.

Exercice 9

- 1) $P(0) = 6 \neq 0$.
- 2) Pour $\alpha \neq 0$:

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{6}{\alpha^4} - \frac{35}{\alpha^3} + \frac{62}{\alpha^2} - \frac{35}{\alpha} + 6 = \frac{6 - 35\alpha + 62\alpha^2 - 35\alpha^3 + 6\alpha^4}{\alpha^4} = \frac{P(\alpha)}{\alpha^4}.$$

Si α est une racine ($\alpha \neq 0$ d'après 1)), alors $P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$.

- 3) a) $P(2) = 96 - 280 + 248 - 70 + 6 = 0$.
 - b) Horner avec $a = 2$: 6 ; $-35 + 12 = -23$; $62 - 46 = 16$; $-35 + 32 = -3$; $6 - 6 = 0$. Donc $Q(x) = 6x^3 - 23x^2 + 16x - 3$.
 - c) $\frac{1}{2}$ est racine de P d'après 2), et $P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - 2\right)Q\left(\frac{1}{2}\right)$ avec $\frac{1}{2} - 2 \neq 0$: donc $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
 - 4) a) Identification : $\left(x - \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + \left(b - \frac{a}{2}\right)x^2 + \left(c - \frac{b}{2}\right)x - \frac{c}{2}$; d'où $a = 6$, $b - 3 = -23$, $b = -20$, $-\frac{c}{2} = -3$, $c = 6$ (et $6 + 10 = 16$).
- Horner avec $a = \frac{1}{2}$: 6 ; $-23 + 3 = -20$; $16 - 10 = 6$; $-3 + 3 = 0$. Même résultat : $a = 6$, $b = -20$, $c = 6$.
- b) $6x^2 - 20x + 6 = 2(3x^2 - 10x + 3)$; 3 en est une racine ($27 - 30 + 3 = 0$), et $3x^2 - 10x + 3 = (x - 3)(3x - 1)$.
- Ainsi

$$P(x) = (x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) \times 2(x - 3)(3x - 1) = (x - 2)(2x - 1)(x - 3)(3x - 1).$$

Exercice 10

1) Dans la somme, chaque terme $P(k)$ pour $2 \leq k \leq n$ apparaît une fois avec le signe $+$ et une fois avec le signe $-$; il reste $P(n+1) - P(1)$.

2) a) $Q(0) = 0$ et $\deg Q = 2$: $Q(x) = ax^2 + bx$. Alors $Q(x+1) - Q(x) = a(2x+1) + b = 2ax + a + b$. Par identification avec x : $2a = 1$ et $a + b = 0$, soit $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$: $Q(x) = \frac{x^2 - x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$.

b) $1 + 2 + \cdots + n = (Q(2) - Q(1)) + \cdots + (Q(n+1) - Q(n)) = Q(n+1) - Q(1) = \frac{(n+1)n}{2} - 0$.

c) $1 + 2 + \cdots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$.

Exercice 11

Pour tout réel x :

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma.$$

Ce polynôme est égal à $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; par identification des coefficients : $\alpha + \beta + \gamma = 6$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 11$ et $\alpha\beta\gamma = 6$.

Enfin $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 36 - 22 = 14$.