

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 05

Ordre dans $\mathbb{R}$

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1

- 1) a et b sont positifs. $a^2 = 9 + 6\sqrt{2} + 2 = 11 + 6\sqrt{2} = b^2$, donc $a = b$.
- 2) $a^2 = 13$ et $b^2 = 13 + 2\sqrt{42}$, donc $b^2 - a^2 = 2\sqrt{42} > 0$. Les réels étant positifs, $a < b$.
- 3) Signe de a : $(4\sqrt{3})^2 = 48 < 50 = (5\sqrt{2})^2$, donc $4\sqrt{3} < 5\sqrt{2}$ et $a < 0$. Comme $b \geq 0$, on a $a < b$.
(De plus $a^2 = 48 - 40\sqrt{6} + 50 = 98 - 40\sqrt{6} = b^2$, donc $a = -b$.)
- 4) $a^2 = 14 + 6\sqrt{5} = 14 + \sqrt{180}$ et $b^2 = 14 + 2\sqrt{33} = 14 + \sqrt{132}$. Comme $180 > 132$, $a^2 > b^2$, et les réels sont positifs : $a > b$.
- 5) $a = \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4} = \sqrt{5} + 2$. Donc $a - b = \sqrt{5} - 2,2$. Or $5 > 2,2^2 = 4,84$, donc $\sqrt{5} > 2,2$ et $a > b$.
- 6) $a = \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{2 - 1} = 3 + 2\sqrt{2}$, donc $a - b = 2\sqrt{2} - 2,8 = \sqrt{8} - \sqrt{7,84} > 0$: $a > b$.
- 7) $a - b = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \geq 0$: $a \geq b$ (égalité pour $x = 3$).

Exercice 2

- 1) $3 \leq a + b \leq 7$; $-4 \leq -b \leq -1$, donc $-2 \leq a - b \leq 2$; $2 \leq ab \leq 12$ (réels positifs); $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{b} \leq 1$, donc $\frac{1}{2} \leq \frac{a}{b} \leq 3$.
- 2)
 - $2 \leq 2x \leq 4$ et $1 \leq -y \leq 3$, donc $3 \leq 2x - y \leq 7$.
 - $1 \leq x^2 \leq 4$; $1 \leq -y \leq 3$ donne $1 \leq y^2 \leq 9$; donc $2 \leq x^2 + y^2 \leq 13$.
 - $1 \leq x \leq 2$ et $1 \leq -y \leq 3$ (positifs) : $1 \leq -xy \leq 6$, donc $-6 \leq xy \leq -1$.
 - $2 \leq x - y \leq 5$, donc $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x - y} \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 3

- 1) a) $0 \leq a^2 < 4$; $-8 < -4a < 4$; $1 < b^2 < 9$; $2 < 2b < 6$. En additionnant : $-5 < E < 23$.
- b) $(a - 2)^2 + (b + 1)^2 - 5 = a^2 - 4a + 4 + b^2 + 2b + 1 - 5 = E$.
- c) $-3 < a - 2 < 0$, donc $0 < (a - 2)^2 < 9$; $2 < b + 1 < 4$, donc $4 < (b + 1)^2 < 16$. Ainsi $-1 < E < 20$: l'amplitude passe de 28 à 21.
- 2) a) $x > 2$ et $y > 2$, donc $x + y > 4$.
- b) $c - d = x^2 - y^2 - 4(x - y) = (x - y)(x + y - 4)$. Or $x - y < 0$ et $x + y - 4 > 0$, donc $c - d < 0$: $c < d$.

Exercice 4

- 1)
 - $\sqrt{5} > 2$ (car $5 > 4$) : $|2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$.
 - $(3\sqrt{2})^2 = 18 < 20 = (2\sqrt{5})^2$: $|3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}| = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$.
 - $\sqrt{3} < 2$: $|\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$.
 - $\sqrt{(3 - 2\sqrt{3})^2} = |3 - 2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} - 3$ (car $(2\sqrt{3})^2 = 12 > 9$).

2)

- $|2x - 3| = 5 \iff 2x - 3 = 5 \text{ ou } 2x - 3 = -5 \iff x = 4 \text{ ou } x = -1 : S = \{-1; 4\}$.
- Une valeur absolue est positive : $|x + 1| = -2$ n'a pas de solution, $S = \emptyset$.
- $|x - 2| = |3x + 4| \iff x - 2 = 3x + 4 \text{ ou } x - 2 = -3x - 4 \iff x = -3 \text{ ou } x = -\frac{1}{2} : S = \left\{-3; -\frac{1}{2}\right\}$.
- $|x - 4| \leq 3 \iff 1 \leq x \leq 7 : S = [1; 7]$.
- $|2x + 1| > 5 \iff 2x + 1 > 5 \text{ ou } 2x + 1 < -5 \iff x > 2 \text{ ou } x < -3 : S =] - \infty; -3[\cup]2; +\infty[$.
- $|x + 3| < 0$ est impossible : $S = \emptyset$.

Exercice 5

- 1) $x - 1 \geq 0$ et $y - 2 \leq 0$, donc $E = |x - 1| + |y - 2| = (x - 1) + (2 - y) = x - y + 1 = 5$.
- 2) $y = x - 4$. De $y \leq 2$ on tire $x \leq 6$, donc $1 \leq x \leq 6$. Alors $-3 \leq x - 4 \leq 2$, soit $-3 \leq y \leq 2$.
- 3) $x \leq 6 < 7$, donc $|x - 7| = 7 - x$; $y \geq -3 > -4$, donc $|y + 4| = y + 4$. D'où $F = 7 - x + y + 4 = 11 - (x - y) = 7$.

Exercice 6

- 1) $1 \leq ab \leq 9$ et, comme $1 \leq b < a \leq 3 : 0 < a - b \leq 2$ (car $a \leq 3$ et $-b \leq -1$).

- $A = ab + (a - b) : 1 < A \leq 11$.
- $B = ab - (a - b)$ et $-2 \leq -(a - b) < 0 : -1 \leq B < 9$.

$$A - B = 2(a - b) > 0, \text{ donc } A > B.$$

- 2) $|A - B| = 2(a - b)$ et $0 < a - b \leq 2$, donc $|A - B| \leq 4$.

Exercice 7

On étudie trois cas selon la position de x par rapport à -1 et 5 .

- Si $x \leq -1 : |x - 5| = 5 - x$ et $|x + 1| = -x - 1$; l'équation devient $4 - 2x = 10$, soit $x = -3$, qui vérifie $x \leq -1$.
- Si $-1 \leq x \leq 5$: l'équation devient $(5 - x) + (x + 1) = 10$, soit $6 = 10$: impossible.
- Si $x \geq 5$: l'équation devient $2x - 4 = 10$, soit $x = 7$, qui vérifie $x \geq 5$.

$$S = \{-3; 7\}.$$

Exercice 8

- 1) $[-2; +\infty[;] - \infty; 5[;] - 3; 4[;] - \infty; 1[$.
- 2) a) $[-2; 4] \cap]1; 6[=]1; 4[$ et $[-2; 4] \cup]1; 6[= [-2; 6[$.
- b) $] - \infty; 3[\cap [0; +\infty[= [0; 3[;] - \infty; 3[\cup [5; +\infty[$ n'est pas un intervalle (il contient 3 et 5 mais pas 4).
- c) $[-4; -1[\cap] - 1; 2[= \emptyset$; $[-4; -1[\cup] - 1; 2[$ n'est pas un intervalle (il ne contient pas -1).
- 3)

Intervalle	Centre	Rayon	Amplitude
$[1; 7]$	4	3	6
$] - 2; 6[$	2	4	8
$[-5; -1]$	-3	2	4

- 4) $]3 - 2; 3 + 2[=]1; 5[$.
- 5) Le rayon est $2 - (-1) = 3$: l'intervalle est $[-1; 5]$.

Exercice 9

$$1) \left| a - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{12} \iff \frac{1}{3} - \frac{1}{12} < a < \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \iff \frac{1}{4} < a < \frac{5}{12}.$$

$$2) \frac{3}{2} < 2a + 1 < \frac{11}{6}, \text{ donc } \frac{6}{11} < \frac{1}{2a+1} < \frac{2}{3}. \text{ Les réels étant positifs, on multiplie par } \frac{1}{4} < a < \frac{5}{12} :$$

$$\frac{3}{22} < \frac{a}{2a+1} < \frac{5}{18}.$$

3) Le centre de cet encadrement est $\frac{1}{2} \left(\frac{3}{22} + \frac{5}{18} \right) = \frac{41}{198}$ et son rayon $\frac{1}{2} \left(\frac{5}{18} - \frac{3}{22} \right) = \frac{7}{99} : \frac{41}{198}$ est une valeur approchée de $\frac{a}{2a+1}$ à $\frac{7}{99}$ près.

Exercice 10

$$1) E = \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1}.$$

Comme $1+x^2 \geq 1$, $\sqrt{1+x^2} \geq 1$, donc $\sqrt{1+x^2}+1 \geq 2$.

$$2) \text{ a) } x^2 \geq 0 \text{ et } 0 < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} \leq \frac{1}{2}, \text{ donc } 0 \leq E \leq \frac{x^2}{2}.$$

b) Avec $x = 0,1 : 1+x^2 = 1,01$ et $0 \leq \sqrt{1,01}-1 \leq 0,005$. Donc $1 \leq \sqrt{1,01} \leq 1,005$: le nombre 1 est une valeur approchée (par défaut) de $\sqrt{1,01}$ à 5×10^{-3} près.

Exercice 11

$$1) x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2 \geq 0. \text{ Ensuite } x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0 \text{ (car } x > 0).$$

$$2) 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0.$$

$$3) (x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \text{ et } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \text{ d'après 1) appliqué à } \frac{x}{y} > 0. \text{ D'où le résultat.}$$

4) Pour des réels positifs, $x+y-2\sqrt{xy} = (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$. Donc $x+y \geq 2\sqrt{xy}$, $y+z \geq 2\sqrt{yz}$, $z+x \geq 2\sqrt{zx}$. Ces inégalités portent sur des réels positifs ; on les multiplie :

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8\sqrt{x^2y^2z^2} = 8xyz.$$

$$5) \frac{x+y}{4} - \frac{xy}{x+y} = \frac{(x+y)^2 - 4xy}{4(x+y)} = \frac{(x-y)^2}{4(x+y)} \geq 0.$$

$$6) \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \geq 0.$$