

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 04

Ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1

1)

$$\begin{aligned} & -9 \notin \mathbb{N}; 7,2 \notin \mathbb{Z}; \frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 0,35 \in \mathbb{D}; \frac{-14}{7} = -2 \in \mathbb{Z}; \\ & \frac{5}{6} \notin \mathbb{D} \text{ (dénominateur } 6 = 2 \times 3); \sqrt{36} = 6 \in \mathbb{N}; \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}; 0 \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

2) On simplifie d'abord :

$$\begin{aligned} & -\frac{13}{40} = \frac{325}{1000} = 0,325; \frac{-21}{35} = \frac{-3}{5} = -0,6; \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2; \\ & -\frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{5}{2^3 \times 7} = \frac{5}{56}. \end{aligned}$$

a) Décimaux : $\frac{13}{40}; \frac{-21}{35}; \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}.$

b) Rationnels non décimaux (fractions irréductibles dont le dénominateur contient un facteur premier autre que 2 et 5) : $\frac{2}{9}; \frac{22}{7}; \frac{5}{2^3 \times 7}.$

c) Irrationnels : $1 + \sqrt{2}$ et $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (si $1 + \sqrt{2}$ était rationnel, $\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2}) - 1$ le serait aussi).

Exercice 2

1) $A = \frac{9}{12} - \frac{10}{12} + \frac{4}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$

$$B = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{17}{12}} = \frac{7}{6} \times \frac{12}{17} = \frac{14}{17}.$$

$$C = 1 - \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

2) $E = 9x^2 - 6x + 1 - (x^2 - 4) = 8x^2 - 6x + 5.$

$$F = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

3) $G = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = (2x - 3)^2.$

$$H = (x + 1)^2 - 3^2 = (x + 1 - 3)(x + 1 + 3) = (x - 2)(x + 4).$$

$$K = x^3 + 3^3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9).$$

Exercice 3

1) $(a - 2b)^3 = a^3 - 3a^2(2b) + 3a(2b)^2 - (2b)^3 = a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3.$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

2)

$$-(a + b)^2 - (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab.$$

$$-(a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + b^2 - 2ab)(a^2 + b^2 + 2ab) = (a - b)^2(a + b)^2.$$

3) a) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$, donc

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y).$$

b) Comme $x + y + z = 0$, on a $x + y = -z$. D'après a) :

$$x^3 + y^3 = (-z)^3 - 3xy(-z) = -z^3 + 3xyz,$$

donc $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Exercice 4

1)

$$- a = 52 \times 10^3 \times 3 \times 10^2 = 156 \times 10^5 = 1,56 \times 10^7.$$

$$- b = 4 \times 10^{-4} \times 6 \times 10^{-3} = 24 \times 10^{-7} = 2,4 \times 10^{-6}.$$

$$- c = 9 \times 10^2.$$

$$- d = \frac{6}{1,5} \times 10^{4-(-2)} = 4 \times 10^6.$$

$$2) P = \frac{x^4 y^6}{x^3 y^4} = xy^2.$$

$$Q = \frac{8x^{-3}y^3 \times x^4}{4y^2} = 2x^{-3+4}y^{3-2} = 2xy.$$

$$R = \frac{3^5 \times 2^{-3} \times 6}{3^4} = 3 \times \frac{6}{8} = \frac{9}{4}.$$

$$3) a) E = a^6 b^{-4} \times a^{-6} b^3 = a^0 b^{-1} = \frac{1}{b}.$$

$$b) E = \frac{1}{2,5 \times 10^{-4}} = \frac{1}{2,5} \times 10^4 = 0,4 \times 10^4 = 4 \times 10^3 \text{ (la valeur de } a \text{ n'intervient pas)}.$$

Exercice 5

$$1) \sqrt{48} = 4\sqrt{3}, \sqrt{27} = 3\sqrt{3}, \sqrt{75} = 5\sqrt{3}, \text{ donc } A = 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

$$B = (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 2\sqrt{3} + 1 = 12 - 4\sqrt{3} + 1 = 13 - 4\sqrt{3}.$$

$$C = \frac{(\sqrt{7} + 2) + (\sqrt{7} - 2)}{(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2)} = \frac{2\sqrt{7}}{7 - 4} = \frac{2\sqrt{7}}{3}.$$

$$2) (1 + \sqrt{2})^3 = 1 + 3\sqrt{2} + 3(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3 = 1 + 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2} = 7 + 5\sqrt{2}.$$

Exercice 6

$$1) (2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}; (2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}.$$

$$2) 2 + \sqrt{3} \text{ est positif et son carré vaut } 7 + 4\sqrt{3} : \text{ par définition de la racine carrée, } \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\text{Comme } 3 < 4, \text{ on a } \sqrt{3} < 2, \text{ donc } 2 - \sqrt{3} \text{ est positif; son carré vaut } 7 - 4\sqrt{3}, \text{ donc } \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

$$3) A = (2 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}; B = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1.$$

Exercice 7

$$1) (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = 5 - 4 = 1. \text{ Donc}$$

$$(\sqrt{5} - 2)^n \times (\sqrt{5} + 2)^n = [(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)]^n = 1^n = 1 :$$

ces deux nombres sont inverses l'un de l'autre.

$$2) \text{ On pose } t = \frac{a}{b}; \text{ alors } \frac{b}{a} = \frac{1}{t} \text{ et } t + \frac{1}{t} = 3.$$

a) $t^2 + \frac{1}{t^2} = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2 = 9 - 2 = 7.$

b) D'après l'identité $u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$ avec $u = t$, $v = \frac{1}{t}$ et $uv = 1$:

$$t^3 + \frac{1}{t^3} = \left(t + \frac{1}{t}\right) \left(t^2 + \frac{1}{t^2} - 1\right) = 3 \times 6 = 18.$$

3) Comme $xyz = 1$, les réels x, y, z sont non nuls. On transforme les deux dernières fractions pour qu'elles aient le dénominateur $1 + x + xy$:

— en multipliant le numérateur et le dénominateur par x : $\frac{1}{1 + y + yz} = \frac{x}{x + xy + xyz} = \frac{x}{x + xy + 1}$;

— en multipliant par xy : $\frac{1}{1 + z + zx} = \frac{xy}{xy + xyz + x^2yz} = \frac{xy}{xy + 1 + x}$ (car $xyz = 1$ et $x^2yz = x$).

Donc la somme vaut $\frac{1 + x + xy}{1 + x + xy} = 1.$

4) a) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4ab + 2ab = 6ab$; $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 2ab.$

b) a et b sont non nuls, donc $ab \neq 0$ et $(a - b)^2 = 2ab \neq 0$: ainsi $a \neq b$. Alors

$$\left(\frac{a + b}{a - b}\right)^2 = \frac{6ab}{2ab} = 3, \quad \text{donc} \quad \frac{a + b}{a - b} = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad \frac{a + b}{a - b} = -\sqrt{3}.$$

Les deux valeurs sont possibles : avec $b = 1$, $a = 2 + \sqrt{3}$ vérifie $a^2 + 1 = 7 + 4\sqrt{3} + 1 = 8 + 4\sqrt{3} = 4a$ et donne $\frac{3 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3}$; avec $b = 1$ et $a = 2 - \sqrt{3}$, on obtient $-\sqrt{3}$.