

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 02

Calcul vectoriel

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1

1) On réordonne les termes de façon à enchaîner les lettres (relation de Chasles) :

$$\vec{s}_1 = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CF}.$$

Pour $\vec{s}_2$, on remplace $-\overrightarrow{CB}$ par $\overrightarrow{BC}$ et $-\overrightarrow{ED}$ par $\overrightarrow{DE}$:

$$\vec{s}_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}.$$

2) a) M est le quatrième sommet du parallélogramme $BMCA$; N est le quatrième sommet du parallélogramme $CNBA$.

b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$.

Donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$: les points M et N sont confondus (c'est le point tel que $ABMC$ soit un parallélogramme).

3) a) D'après la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$; donc E est le point tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC}$: on reporte le vecteur $\overrightarrow{AC}$ à partir de C .

b) On vient de voir que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC}$. Donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CE}$, ce qui signifie que C est le milieu de $[AE]$ (propriété du milieu : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$).

Exercice 2

1) On utilise la méthode du cours : par exemple, pour $2\vec{u} - \vec{v}$, on place M_1 tel que $\overrightarrow{AM_1} = 2\vec{u}$, puis W_1 tel que $\overrightarrow{M_1W_1} = -\vec{v}$; on a alors $\overrightarrow{AW_1} = 2\vec{u} - \vec{v}$.

— $2\vec{u}$: même sens que $\overrightarrow{AB}$, longueur $2AB$; $-\vec{v} = \overrightarrow{CA}$, reporté en A .

— $\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$: on part du milieu de $[AB]$ et on ajoute $\vec{v}$.

— $-\frac{3}{2}\vec{v}$: sens contraire de $\overrightarrow{AC}$, longueur $\frac{3}{2}AC$.

— $\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$: on part de B et on ajoute $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

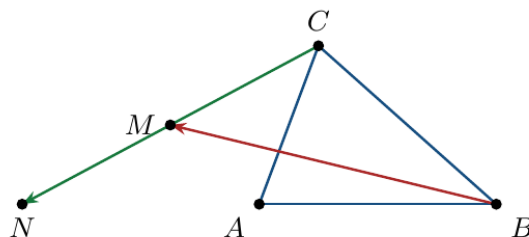
2) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

On construit donc M en reportant à partir de A la moitié du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

3) $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$. On introduit A :

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.$$

Ainsi $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BA}$: N est le symétrique de B par rapport à A .



Exercice 3

1) $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ donne $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$. Donc

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Ensuite, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NP} &= \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + 3(-\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{8}{3}\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA}.\end{aligned}$$

2) $8\overrightarrow{MN} = 8\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}\right) = \frac{8}{3}\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{NP}$. Donc $\alpha = 8$.

(Conséquence : $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires, les points M, N, P sont alignés.)

Exercice 4

1) On remplace $\overrightarrow{BC}$ par $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$:

$$\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - 2(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

$$\vec{v} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - 2\overrightarrow{AB} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

2) $-\frac{1}{2}\vec{u} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Ainsi $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$: les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 5

1) $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}.$$

2) $\frac{5}{2}\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BJ}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires, donc $(IC) \parallel (BJ)$.

Exercice 6

1) $ABCD$ est un parallélogramme : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}.$$

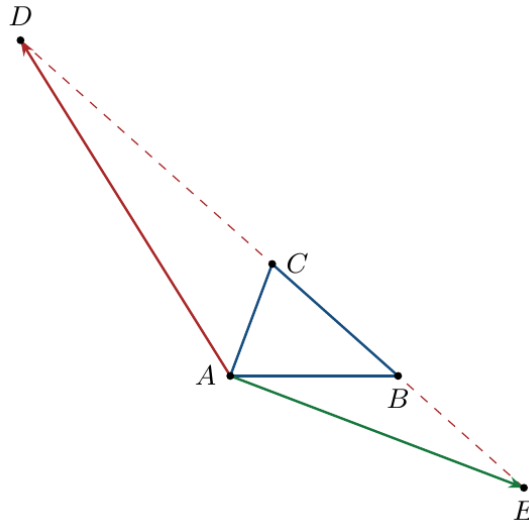
$$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DQ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

2) $-2\overrightarrow{CQ} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CP}$. Les vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{CQ}$ sont colinéaires, donc C, P et Q sont alignés.

Exercice 7

1) D : à partir de C , on reporte deux fois le vecteur $\overrightarrow{BC}$ (car $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$ donne $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BC}$).

E : on place M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$, puis E tel que $\overrightarrow{ME} = -\overrightarrow{AC}$.



2) On exprime tout en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, avec $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}.$$

Alors

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}.$$

Si K est le milieu de $[ED]$, on a $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AK}$ (propriété du milieu avec le point A). Donc $2\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$, d'où $K = C$: C est le milieu de $[ED]$.

Exercice 8

J est le milieu de $[AC]$, donc $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MJ}$. L'égalité donnée devient

$$2\overrightarrow{MJ} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}, \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

D'après la caractérisation du milieu, M est le milieu du segment $[BJ]$.

Exercice 9

1) et 2) E est sur la demi-droite $[AD)$ avec $AE = \frac{5}{4}AD$; F est sur la demi-droite $[AB)$ avec $AF = 5AB$.

3) $ABCD$ est un parallélogramme : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FE} &= \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE} = -5\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AD} = -5(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) + \frac{5}{4}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{25}{4}\overrightarrow{AD} - 5\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

4) $5\overrightarrow{CE} = \frac{25}{4}\overrightarrow{AD} - 5\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FE}$. Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont colinéaires et ont le point E en commun : les points C , E et F sont alignés.

Exercice 10

1) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{v}$.

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \vec{u} - \frac{1}{3}\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{u}.$$

2) a) $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$; $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\vec{u} - \vec{v}$.

b) $-\frac{2}{3}\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{CP}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{CP}$ sont colinéaires, donc $(BN) \parallel (CP)$.

3) a) I est le milieu de $[BN]$: $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = \vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$, donc

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{4}\vec{v}.$$

K est le milieu de $[CP]$: $2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\vec{u} + \vec{v}$, donc

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

b) $\frac{2}{3}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = \overrightarrow{AK}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires : A , I et K sont alignés.

4) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} = \vec{u} + \frac{3}{5}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{2}{5}\vec{u} + \frac{3}{5}\vec{v}$.

On remarque que $\frac{4}{5}\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\vec{u} + \frac{3}{5}\vec{v} = \overrightarrow{AE}$. Donc A , I et E sont alignés : E appartient à la droite (AI) .

D'après 3) b), la droite (IK) passe par A ; elle est donc égale à la droite (AI) (on a $I \neq A$, car $\overrightarrow{AI} \neq \vec{0}$).
Conclusion : $E \in (IK)$.

Exercice 11

On exprime $\overrightarrow{MN}$ avec la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = -k\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.$$

On regroupe les termes :

- $-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$, donc $-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$;
- $-k\overrightarrow{BA} + k\overrightarrow{CA} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) = k(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = k\overrightarrow{CB}$.

Donc $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{CB} = -k\overrightarrow{BC}$: les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires (pour tout réel k ; si $k = 0$, alors $M = N$ et $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$).

Exercice 12

1) M a pour abscisse x dans le repère $(B; \overrightarrow{BC})$: $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$. Alors

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + x(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1-x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}.$$

2) On additionne :

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = (1-x+x)\overrightarrow{AB} + (x+1-x)\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

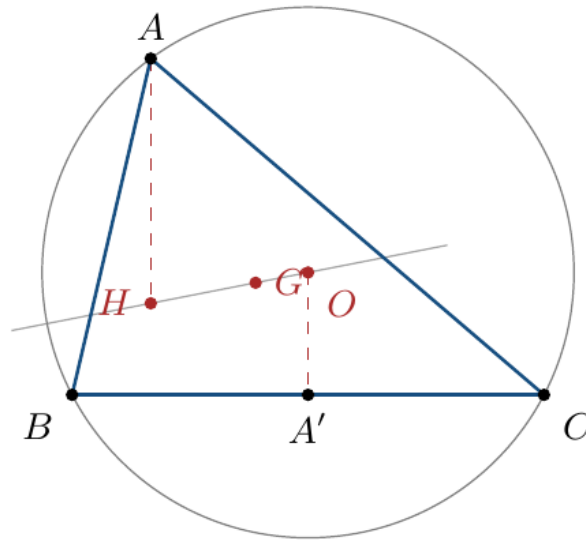
Comme I est le milieu de $[BC]$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$. Donc $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AI}$, ce qui signifie que I est le milieu de $[MN]$.

Les points M et I appartiennent à (BC) . Si $M = I$, alors $N = I \in (BC)$. Sinon, N est sur la droite (MI) , qui est la droite (BC) . Dans tous les cas, $N \in (BC)$.

(Plus précisément, $\overrightarrow{BN} = (1-x)\overrightarrow{BC}$: N a pour abscisse $1-x$.)

Exercice 13

1) Figure :



2) A' est le milieu de $[BC]$; d'après la caractérisation du milieu (avec le point O) : $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$.

3) D'après 2), $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA'}$: à partir de A , on reporte le vecteur $2\overrightarrow{OA'}$.

4) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$.

5) $OB = OC$ (rayons du cercle circonscrit), donc O est sur la médiatrice de $[BC]$; A' aussi. Comme le triangle n'est pas rectangle en A , $[BC]$ n'est pas un diamètre du cercle circonscrit, donc $O \neq A'$: la droite (OA') est la médiatrice de $[BC]$, perpendiculaire à (BC) .

D'après 4), $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires, avec $\overrightarrow{AH} \neq \vec{0}$ (car $O \neq A'$) : $(AH) \parallel (OA')$. Donc $(AH) \perp (BC)$.

6) (AH) est la hauteur issue de A et (BH) est la hauteur issue de B : H est l'intersection de deux hauteurs, c'est l'**orthocentre** du triangle ABC .

7) On introduit G :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{OG}.$$

8) D'après 3) et 7), $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires : O , G et H sont alignés.