

Corrigé détaillé de la série — Chapitre 01

Notions d'arithmétique

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1

1) On considère $n \in \mathbb{N}$.

- $A = 12n + 4 = 2(6n + 2)$, avec $6n + 2 \in \mathbb{N}$: A est **pair**.
- $B = 6n^2 + 10n + 2 + 1 = 2(3n^2 + 5n + 1) + 1$, avec $3n^2 + 5n + 1 \in \mathbb{N}$: B est **impair**.
- $C = n(n + 1) + 10$. Le produit $n(n + 1)$ de deux entiers consécutifs est pair : $n(n + 1) = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Donc $C = 2(k + 5)$: C est **pair**.
- $2n + 1$ et $2n + 5 = 2(n + 2) + 1$ sont impairs ; leur produit est impair : D est **impair**. (Directement : $D = 4n^2 + 12n + 5 = 2(2n^2 + 6n + 2) + 1$.)
- $n(n + 1)$ est pair, donc $E = n(n + 1) \times (n + 5)$ est pair (un facteur pair suffit).
- $F = n^2 + n + 6n + 1 = n(n + 1) + 2 \times 3n + 1$. Avec $n(n + 1) = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) : $F = 2(k + 3n) + 1$: F est **impair**.

2) $a = 2k$ et $b = 2k'$ avec $k, k' \in \mathbb{N}$. Comme $a \geq b$, on a $k \geq k'$, donc $k - k' \in \mathbb{N}$ et $a - b = 2(k - k')$ est pair.

3) $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$ avec $k, k' \in \mathbb{N}$:

$$ab = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2(2kk' + k + k') + 1,$$

avec $2kk' + k + k' \in \mathbb{N}$: ab est impair.

4) $a = 2k$ et $b = 2k' + 1$: $a + b = 2(k + k') + 1$ avec $k + k' \in \mathbb{N}$: $a + b$ est impair.

5) Les entiers $n + 2$ et $n + 7$ diffèrent de 5, donc ils sont de parités contraires (si l'un est pair, l'autre s'obtient en ajoutant l'impair 5, d'après 4)). L'un des deux facteurs est pair, donc le produit $(n + 2)(n + 7)$ est pair.

6) $a = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$: $a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair. (C'est aussi le cas particulier $b = a$ de la question 3).)

7) Deux cas seulement sont possibles pour a :

- si a est impair, alors a^2 est impair d'après 6), ce qui contredit l'hypothèse « a^2 pair » ;
- il reste donc le cas a pair.

Conclusion : si a^2 est pair, alors a est pair.

8) Pour $n \geq 1$: $(n - 1)n(n + 1) = (n - 1)(n^2 + n) = n^3 + n^2 - n^2 - n = n^3 - n$.

Les entiers n et $n + 1$ sont consécutifs, donc $n(n + 1)$ est pair ; par suite $n^3 - n = (n - 1) \times n(n + 1)$ est pair.

Exercice 2

1) Les multiples de 7 sont les nombres $7k$, $k \in \mathbb{N}$. Comme $7 \times 11 = 77 < 80 < 84 = 7 \times 12$, ceux qui sont inférieurs à 80 sont :

0 ; 7 ; 14 ; 21 ; 28 ; 35 ; 42 ; 49 ; 56 ; 63 ; 70 ; 77.

2) $3^{n+2} + 3^n = 3^n \times 3^2 + 3^n = 3^n(9 + 1) = 10 \times 3^n$, avec $3^n \in \mathbb{N}$: c'est un multiple de 10.

3) La somme des chiffres de $\overline{4c56}$ est $4 + c + 5 + 6 = 15 + c$. Comme 15 est un multiple de 3, le nombre est un multiple de 3 exactement lorsque c en est un. Avec $c \in \{0; 1; \dots; 9\}$:

$$c \in \{0; 3; 6; 9\}.$$

Les nombres obtenus sont 4056 ; 4356 ; 4656 ; 4956.

- 4) $m = ka$ et $m' = k'a$ avec $k, k' \in \mathbb{N} : 5m + 2m' = (5k + 2k')a$ avec $5k + 2k' \in \mathbb{N} : c'est un multiple de a .$
- 5) $a = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N} : a^2 + 3 = 4k^2 + 4k + 4 = 4(k^2 + k + 1)$, avec $k^2 + k + 1 \in \mathbb{N} : c'est un multiple de 4.$

Exercice 3

- 1) a) $30 = 1 \times 30 = 2 \times 15 = 3 \times 10 = 5 \times 6$ (4 ne divise pas 30, et on s'arrête car $6 \times 6 > 30$). Les diviseurs de 30 sont 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30.
- b) $1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 + 30 = 72 = 24 \times 3$: la somme est bien un multiple de 24.
- 2) Pour 64215 : le chiffre des unités est 5, donc il est divisible par 5 mais pas par 2. La somme des chiffres est $6 + 4 + 2 + 1 + 5 = 18$, divisible par 9 et par 3 : il est divisible par 3 et par 9 ($64215 = 9 \times 7135$).
- 3) Un entier est divisible par 2 et par 9 si et seulement s'il est divisible par PPCM(2; 9) = 18. Les multiples de 18 entre 200 et 260 sont :

$$18 \times 12 = 216 ; \quad 18 \times 13 = 234 ; \quad 18 \times 14 = 252.$$

- 4) $5^{n+1} \times 3^{n+2} = 5 \times 5^n \times 3^2 \times 3^n = 45 \times (5^n \times 3^n) = 45 \times 15^n$, avec $15^n \in \mathbb{N} : ce nombre est divisible par 45.$
- 5) a) $20 = 1 \times 20 = 2 \times 10 = 4 \times 5$: les diviseurs de 20 sont 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20.

b) $(x + y) - (x - y) = 2y$ est pair. Si $x - y$ est pair, alors $x + y = (x - y) + 2y$ est pair (somme de deux pairs) ; si $x - y$ est impair, alors $x + y$ est impair (somme d'un impair et d'un pair). Donc $x + y$ et $x - y$ ont la même parité.

c) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. On cherche $x \geq y$ (car $x^2 - y^2 = 20 > 0$) tels que $(x - y)(x + y) = 20$, avec $x - y \leq x + y$.

D'après a), les décompositions possibles sont $(x - y; x + y) \in \{(1; 20); (2; 10); (4; 5)\}$. D'après b), les deux facteurs ont la même parité : seul (2; 10) convient. On obtient

$$x - y = 2 \quad \text{et} \quad x + y = 10, \quad \text{d'où} \quad x = 6 \quad \text{et} \quad y = 4.$$

Vérification : $36 - 16 = 20$. L'unique couple est (6; 4).

6) PPCM(5; 9) = 45 : les multiples communs à 5 et à 9 sont exactement les multiples de 45. Le nombre $\overline{3c75}$ est donc divisible par 45 si et seulement s'il est divisible par 5 et par 9. Il se termine par 5 : il est divisible par 5. La somme des chiffres est $15 + c$, avec $15 \leq 15 + c \leq 24$; le seul multiple de 9 dans cet intervalle est 18, d'où $c = 3$.

Vérification : $3375 = 45 \times 75$.

7) Le chiffre u vérifie $1 \leq u \leq 9$ (nombre à quatre chiffres). La somme des chiffres est $u + 14$, comprise entre 15 et 23.

— Divisible par 3 : $u + 14 \in \{15; 18; 21\}$, soit $u \in \{1; 4; 7\}$.

— Divisible par 9 : $u + 14 = 18$, soit $u = 4$.

Donc $u \in \{1; 7\}$: les nombres 1482 et 7482 conviennent.

8) a) On développe :

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^4 + x^2 + 1.$$

b) Avec $x = 10$: $10^4 + 10^2 + 1 = 10\,101$ et $(100 + 10 + 1)(100 - 10 + 1) = 111 \times 91$. Donc $10\,101 = 111 \times 91$.

c) Avec $x = 100$: $x^4 = 10^8$ et $x^2 = 10^4$, donc

$$10^8 + 10^4 + 1 = (10\,000 + 100 + 1)(10\,000 - 100 + 1) = 10\,101 \times 9901.$$

Les deux facteurs sont supérieurs à 1 : ce nombre n'est pas premier.

9) a) $6n = 1 \times 6n = 2 \times 3n = 3 \times 2n = 6 \times n$: les nombres 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; n ; $2n$; $3n$; $6n$ sont des diviseurs de $6n$.

b) $3n^2 + 3n = 3n(n + 1)$: les nombres 1 ; 3 ; n ; $n + 1$; $3n$; $3(n + 1)$ en sont des diviseurs (on peut aussi citer $n(n + 1)$ et $3n(n + 1)$).

c) Les nombres 1 ; 3 ; n ; $3n$ figurent dans les deux listes : ce sont des diviseurs communs à $6n$ et à $3n^2 + 3n$. (Ces diviseurs ne sont pas nécessairement distincts : pour $n = 1$ ou $n = 3$, certains coïncident.)

Exercice 4

1) a) $54 = 1 \times 54 = 2 \times 27 = 3 \times 18 = 6 \times 9$: diviseurs de 54 : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18 ; 27 ; 54.

$90 = 1 \times 90 = 2 \times 45 = 3 \times 30 = 5 \times 18 = 6 \times 15 = 9 \times 10$: diviseurs de 90 : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 15 ; 18 ; 30 ; 45 ; 90.

b) Diviseurs communs : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18. Donc $\text{PGCD}(54; 90) = 18$.

2) On écrit $a = 9\alpha$ et $b = 9\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$, $\alpha < \beta$ et $\text{PGCD}(\alpha; \beta) = 1$. De $a + b = 90$ on tire $\alpha + \beta = 10$.

$(\alpha; \beta)$	(1; 9)	(2; 8)	(3; 7)	(4; 6)
$\text{PGCD}(\alpha; \beta)$	1	2	1	2

On retient (1; 9) et (3; 7) : les couples cherchés sont (9; 81) et (27; 63).

Vérification : $\text{PGCD}(9; 81) = 9$ et $\text{PGCD}(27; 63) = 9$, avec $9 + 81 = 27 + 63 = 90$.

Exercice 5

1)

— $51 = 3 \times 17$: non premier.

— $221 = 13 \times 17$: non premier.

— $223 : 14 \times 14 = 196 \leq 223 < 225 = 15 \times 15$. On teste 2, 3, 5, 7, 11, 13 : 223 est impair, la somme de ses chiffres vaut 7, il ne se termine ni par 0 ni par 5, et $223 = 7 \times 31 + 6 = 11 \times 20 + 3 = 13 \times 17 + 2$. Donc 223 est **premier**.

— $247 = 13 \times 19$: non premier.

— $289 = 17 \times 17$: non premier.

— $311 : 17 \times 17 = 289 \leq 311 < 324 = 18 \times 18$. On teste 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 : $311 = 7 \times 44 + 3 = 11 \times 28 + 3 = 13 \times 23 + 12 = 17 \times 18 + 5$; la somme des chiffres vaut 5. Donc 311 est **premier**.

— $1001 = 7 \times 11 \times 13$: non premier.

Les nombres premiers de la liste sont 223 et 311.

2) a) $(n + 2)(n^2 - 2n + 4) = n^3 - 2n^2 + 4n + 2n^2 - 4n + 8 = n^3 + 8$.

b) Pour $n \geq 1 : n + 2 \geq 3$; et $n^2 - 2n + 4 = (n - 1)^2 + 3 \geq 3$. Le nombre $n^3 + 8$ est donc le produit de deux entiers naturels différents de 1 : il n'est pas premier.

Exercice 6

1) Par divisions successives :

Quotients de a	2352	1176	588	294	147	49	7	1
Diviseurs premiers	2	2	2	2	3	7	7	

Quotients de b	3780	1890	945	315	105	35	7	1
Diviseurs premiers	2	2	3	3	3	5	7	

$$a = 2^4 \times 3 \times 7^2 \quad \text{et} \quad b = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7.$$

2) $\text{PGCD}(a; b) = 2^2 \times 3 \times 7 = 84$.

$\text{PPCM}(a; b) = 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7^2 = 105\,840$.

Contrôle : $84 \times 105\,840 = 8\,890\,560 = 2352 \times 3780$.

3) $\frac{a}{b} = \frac{2^4 \times 3 \times 7^2}{2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7} = \frac{2^2 \times 7}{3^2 \times 5} = \frac{28}{45}$, fraction irréductible car $\text{PGCD}(28; 45) = 1$.

$$a \times b = 2^6 \times 3^4 \times 5 \times 7^3 = (2^3 \times 3^2 \times 7)^2 \times 5 \times 7, \text{ donc}$$

$$\sqrt{a \times b} = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times \sqrt{35} = 504\sqrt{35}.$$

4) $m \times a$ est un carré parfait lorsque tous les exposants de sa décomposition sont pairs. Dans $a = 2^4 \times 3^1 \times 7^2$, seul l'exposant de 3 est impair : le plus petit m est $m = 3$, et $3a = 7056 = 84^2$.

5) $p \times b$ est un cube lorsque tous les exposants sont des multiples de 3. Dans $b = 2^2 \times 3^3 \times 5^1 \times 7^1$, il manque 2^1 , 5^2 et 7^2 :

$$p = 2 \times 5^2 \times 7^2 = 2450, \quad p \times b = 2^3 \times 3^3 \times 5^3 \times 7^3 = 210^3.$$

Exercice 7

1) $72 = 2^3 \times 3^2$ et $35 = 5 \times 7$, donc $a = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$.

$6^3 = 2^3 \times 3^3$ et $14 = 2 \times 7$, donc $b = 2^4 \times 3^3 \times 7$.

2) $\text{PGCD}(a; b) = 2^3 \times 3^2 \times 7 = 504$; $\text{PPCM}(a; b) = 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 15\,120$.

3) $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $120 = 2^3 \times 3 \times 5$. Le plus petit dénominateur commun est

$$\text{PPCM}(84; 120) = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 = 840.$$

Comme $840 = 84 \times 10 = 120 \times 7$:

$$\frac{11}{84} = \frac{110}{840} \quad \text{et} \quad \frac{17}{120} = \frac{119}{840}.$$

Exercice 8

1) $(n+3)(n+4) + 9 = n^2 + 4n + 3n + 12 + 9 = n^2 + 7n + 21$.

2) On pose $N = n^2 + 7n + 21 = (n+3)(n+4) + 9$.

- Si $n+3$ divise N , comme $n+3$ divise $(n+3)(n+4)$, il divise la différence $N - (n+3)(n+4) = 9$. Donc $n+3 \in \{1; 3; 9\}$; or $n+3 \geq 3$, d'où $n+3 = 3$ ou $n+3 = 9$, soit $n = 0$ ou $n = 6$.
- Réciproquement : pour $n = 0$, $N = 21 = 3 \times 7$; pour $n = 6$, $N = 99 = 9 \times 11$. Les deux valeurs conviennent.

Les valeurs cherchées sont $n = 0$ et $n = 6$.

Exercice 9

1) 378 et 270 se terminent par 8 et 0 : ils sont pairs. Les sommes des chiffres sont $3 + 7 + 8 = 18$ et $2 + 7 + 0 = 9$, divisibles par 9 : ils sont divisibles par 9.

2) $378 = 2 \times 189 = 2 \times 9 \times 21 = 2 \times 3^3 \times 7$; $270 = 2 \times 135 = 2 \times 27 \times 5 = 2 \times 3^3 \times 5$.

3) Le nombre de bouquets doit diviser 378 et 270 (toutes les fleurs sont utilisées, chaque bouquet est identique). Le nombre maximal est donc

$$\text{PGCD}(378; 270) = 2 \times 3^3 = 54.$$

Chaque bouquet contient alors $378 \div 54 = 7$ roses et $270 \div 54 = 5$ tulipes.

Exercice 10

1)

- $324 = 2^2 \times 3^4 = (2 \times 3^2)^2 = 18^2$;
- $2025 = 3^4 \times 5^2 = (3^2 \times 5)^2 = 45^2$;
- $144 \times 225 = 12^2 \times 15^2 = (12 \times 15)^2 = 180^2$;
- $12^5 \times 3 = 2^{10} \times 3^5 \times 3 = 2^{10} \times 3^6 = (2^5 \times 3^3)^2 = 864^2$.

2) $9n^2 + 12n + 4 = (3n)^2 + 2 \times 3n \times 2 + 2^2 = (3n + 2)^2$, avec $3n + 2 \in \mathbb{N}$: c'est un carré parfait.

3) a) $14^2 = 196 < 200 < 225 = 15^2$: 200 est strictement compris entre les carrés de deux entiers consécutifs, ce n'est pas un carré parfait.

b) Pour $n \geq 1$:

— $n^2 < n^2 + n$, car $n > 0$;

— $n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, car $n < 2n + 1$.

Ainsi $n^2 < n^2 + n < (n + 1)^2$: $n^2 + n$ est strictement compris entre les carrés des entiers consécutifs n et $n + 1$, ce n'est pas un carré parfait.