

Corrigé du devoir surveillé n° 1 (barème)

Arithmétique — Calcul vectoriel — Projection

Tronc Commun Sciences · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Barème : exercice 1 : 12 pts ; exercice 2 : 5 pts ; exercice 3 : 3 pts ; total 20 pts, plus 2 bonus de 0,5 pt (note plafonnée à 20). La répartition des points à l'intérieur de chaque question est indiquée entre crochets.

Exercice 1 (12 points)

1) a) [2 pts] Divisions successives [1 pt par décomposition] :

Quotients de a	4200	2100	1050	525	175	35	7	1
Diviseurs premiers	2	2	2	3	5	5	7	

Quotients de b	4410	2205	735	245	49	7	1
Diviseurs premiers	2	3	3	5	7	7	

Donc $a = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$ et $b = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$.

1) b) [2 pts] PGCD($a; b$) = $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$ [1] ; PPCM($a; b$) = $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 = 88\,200$ [1].

1) c) [2 pts] $\frac{a}{b} = \frac{2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7}{2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2} = \frac{2^2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{20}{21}$ [0,5] ; $\frac{a}{b} + \frac{1}{21} = \frac{21}{21} = 1$ [0,5].

$a \times b = 2^4 \times 3^3 \times 5^3 \times 7^3 = (2^2 \times 3 \times 5 \times 7)^2 \times 3 \times 5 \times 7$, donc $\sqrt{a \times b} = 420\sqrt{105}$ [1].

2) [2,5 pts] $A = 3^n \times 3^2 + 3^n = 3^n(9 + 1) = 10 \times 3^n$, avec $3^n \in \mathbb{N}$: A est un multiple de 10 [1,25].

$B = 5 \times 2 \times 2^n + 2^3 \times 2^n = (10 + 8) \times 2^n = 9 \times (2 \times 2^n)$, avec $2^{n+1} \in \mathbb{N}$: 9 divise B [1,25].

3) [1,5 pt] $18 \times 18 = 324 \leq 337 < 361 = 19 \times 19$: on teste les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 [0,5].

337 est impair ; la somme de ses chiffres vaut 13 (non divisible par 3) ; il ne se termine ni par 0 ni par 5 ; $337 = 7 \times 48 + 1 = 11 \times 30 + 7 = 13 \times 25 + 12 = 17 \times 19 + 14$ [0,5]. Aucun ne divise 337 : il est **premier** [0,5].

4) [2 pts] $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$ [0,5] : $n^2 + 7 = 4k^2 + 4k + 8 = 4k(k + 1) + 8$ [0,5]. Le produit $k(k + 1)$ de deux entiers consécutifs est pair : $k(k + 1) = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$ [0,5]. Donc $n^2 + 7 = 8m + 8 = 8(m + 1)$ est un multiple de 8 [0,5].

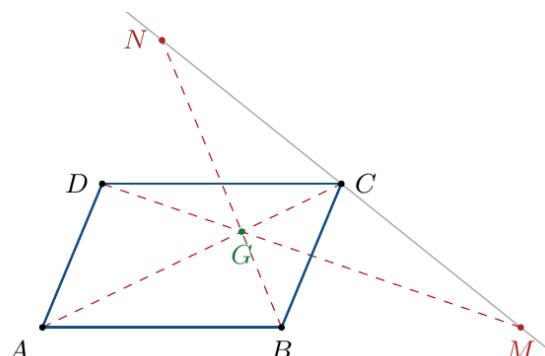
Bonus [+0,5 pt]. D'après le calcul précédent, $n^2 - 1 = 4k(k + 1) = 8m$. De plus $n^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2 = 2(2k^2 + 2k + 1)$ est pair. Donc

$$n^4 - 1 = (n^2 - 1)(n^2 + 1) = 8m \times 2(2k^2 + 2k + 1) = 16m(2k^2 + 2k + 1)$$

est un multiple de 16.

Exercice 2 (5 points)

1) [1 pt] M est le symétrique de A par rapport à B , et N celui de A par rapport à D .



2) [1 pt] $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ (parallélogramme). Donc :

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \text{ [0,5]}; \quad \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ [0,5]}.$$

3) [0,5 pt] $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$, donc C est le milieu de $[MN]$ [0,5].

4) [1 pt] $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{AK} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{AC}$ [0,5]. Ainsi $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$: C est le milieu de $[AK]$ [0,5].

5) [1,5 pt] $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB}$ [0,5] $= 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{BD}$ [0,5] : vecteurs colinéaires, donc $(BD) \parallel (MN)$ [0,5].

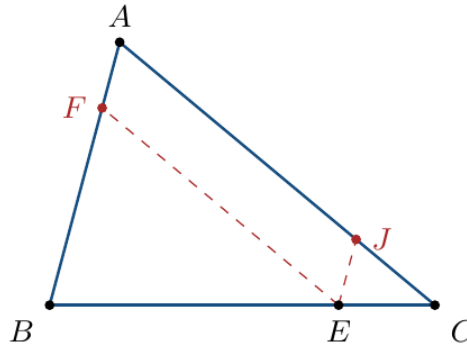
Bonus [+0,5 pt]. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

$$- \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AM} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{MD} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} : \overrightarrow{MG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MD}, \text{ donc } G \in (MD).$$

$$- \overrightarrow{BG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BN}, \text{ donc } G \in (BN).$$

Exercice 3 (3 points)

1) [0,5 pt] Figure :



2) [1 pt] *Projection sur (AB) parallèlement à (AC) :* $B \mapsto B, C \mapsto A, E \mapsto F$ [0,5]. Or $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ [0,5].

3) a) [0,5 pt] *Projection sur (AC) parallèlement à (AB) :* $C \mapsto C, B \mapsto A, E \mapsto J$. De $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ on tire $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$.

b) [0,5 pt] $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. D'autre part,

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AJ}.$$

c) [0,5 pt] D'après la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AJ}$ signifie que $AFEJ$ est un **parallélogramme** (les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AJ}$ ne sont pas colinéaires, il n'est pas aplati).