

Examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2023

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (les deux parcours) — option française Code RS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude des fonctions numériques et calcul intégral	8 points

- On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 : Suites numériques (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}, \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1) (0,5 pt) Montrer que pour tout entier naturel $n : u_n > -1$.

► Afficher / Masquer la solution

2) (0,5 pt) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis déduire que (u_n) est convergente.

► Afficher / Masquer la solution

3) On pose : $v_n = \frac{3}{1 + u_n}$, pour tout entier naturel n .

a) (0,5 pt) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 puis déterminer son premier terme.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Exprimer u_n en fonction de n , pour tout n de $\mathbb{N}$ et déduire la limite de la suite (u_n) .

► Afficher / Masquer la solution

4) On pose $w_n = e^{3-v_n}$ et $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) (0,5 pt) Montrer que (w_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Calculer la limite de la somme S_n .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(2, 1, 2)$, $B(-2, 0, 5)$, $C(4, -5, 7)$ et $\Omega(1, -1, 0)$. On pose $\vec{u} = \vec{\Omega A}$.

Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon $R = 3$.

1) a) (0,5 pt) Montrer que $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 13\vec{u}$ et en déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,25 pt) Vérifier que $x + 2y + z - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A .

► Afficher / Masquer la solution

2) Soient (P) le plan d'équation cartésienne $3x + 4y + z + 1 = 0$ et (Δ) la droite passant par le point A et orthogonale au plan (P) .

a) (0,5 pt) Montrer que la droite (Δ) coupe le plan (P) au point $H(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2})$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Déterminer les coordonnées du point D tel que H soit milieu du segment $[AD]$.

► Afficher / Masquer la solution

3) Soit (Q) le plan passant par le point D et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}$.

a) (0,25 pt) Montrer que le plan (Q) est tangent à la sphère (S) en D .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que les plans (Q) et (ABC) se coupent suivant la droite (BC) .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Nombres complexes (3 points)

1) On considère le nombre complexe $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

a) (0,25 pt) Montrer que : $a = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,25 pt) Dédire que a^{2022} est un nombre réel.

► Afficher / Masquer la solution

2) (0,5 pt) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a et $\bar{a}$. Déterminer une mesure de l'angle de la rotation R de centre O et qui transforme B en A .

► Afficher / Masquer la solution

3) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation $(E_\alpha) : z^2 - \sqrt{3}z + \alpha = 0$ où α est un nombre réel non nul. On suppose que l'équation (E_α) admet deux racines complexes conjuguées non réelles z et $\bar{z}$.

Soient les points $M(z)$, $N(\bar{z})$ et $P(\sqrt{3})$ du plan complexe. Sans résoudre l'équation (E_α) :

a) (0,5 pt) Justifier que $\alpha > \frac{3}{4}$ et que $\alpha = z\bar{z}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que $|z| = |z - \sqrt{3}|$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) En déduire que les points M et N appartiennent à la médiatrice (Δ) du segment $[OP]$.

► Afficher / Masquer la solution

d) (0,5 pt) Déterminer la valeur de α pour laquelle $|z - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$ et déduire dans ce cas les points d'intersection de la droite (Δ) et le cercle de centre P et de rayon $\sqrt{3}$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 4 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient quatre boules blanches et deux boules noires, indiscernables au toucher.

1) On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

a) (0,5 pt) Calculer la probabilité de l'événement A : « tirer au moins une boule noire ».

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Soit l'événement B : « obtenir deux boules de même couleur ». Montrer que $p(B) = \frac{7}{15}$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) On répète cette expérience cinq fois en remettant dans l'urne les boules tirées, après chaque tirage. Quelle est la probabilité pour que l'événement B soit réalisé exactement trois fois ?

► Afficher / Masquer la solution

2) Dans cette question, on tire des boules de l'urne, une après l'autre et sans remise et on arrête le tirage lorsqu'on obtient une boule blanche pour la première fois. Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de tirages effectués dans cette expérience.

a) (0,25 pt) Justifier que les valeurs prises par X sont : 1 ; 2 ; et 3.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,25 pt) Montrer que $p(X = 2) = \frac{4}{15}$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

► Afficher / Masquer la solution

d) (0,5 pt) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule noire ?

► Afficher / Masquer la solution

Problème (8 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 e^{x(2-x)} & ; x \leq 2 \\ 1 + (x-2)^2 \ln(x-2) & ; x > 2 \end{cases}$$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1) (0,5 pt) Montrer que la fonction f est continue au point 2.

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (0,25 pt) Vérifier que pour tout $x < 2$ et $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = x e^{x(2-x)} - x \frac{e^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)}.$$

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que f est dérivable à gauche en 2.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,75 pt) Montrer que f est dérivable en 2 et que $f'(2) = 0$ puis interpréter géométriquement le résultat.

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (0,25 pt) Vérifier que pour tout $x \leq 2$, $f(x) = x(x-2)e^{x(2-x)} + e^{x(2-x)}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,75 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

► Afficher / Masquer la solution

4) a) (0,5 pt) Montrer que pour tout $x < 2$, $f'(x) = 2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que pour tout $x > 2$, $f'(x) = (x-2)(1+2\ln(x-2))$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Résoudre dans l'intervalle $]2, +\infty[$, l'inéquation : $1 + 2\ln(x-2) \leq 0$.

► Afficher / Masquer la solution

d) (0,75 pt) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

5) (1 pt) Construire la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (On donne : $f(3) \approx 1$; $2 + \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 2,6$ et $f(2 + \frac{1}{\sqrt{e}}) \approx 0,8$.)

► Afficher / Masquer la solution

6) Soit $\lambda \in]2, 3[$.

a) (0,5 pt) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_{\lambda}^3 (x-2)^2 \ln(x-2) dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}(\lambda-2)^3 \left(\frac{1}{3} - \ln(\lambda-2) \right).$$

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Déduire en fonction de λ , l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations : $y = 1$, $x = \lambda$ et $x = 3$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,25 pt) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow 2^+} A(\lambda)$.

► Afficher / Masquer la solution