

Examen national du baccalauréat — Session de rattrapage 2022

Solutions cachées (cliquer sur les boutons)

Prof. El Koudri Hamza

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (les deux parcours) — option française Code RS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	2,5 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude des fonctions numériques et calcul intégral	8,5 points

- On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 : Suites numériques (2,5 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) a) (0,5 pt) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 1$.

► [Afficher / Masquer la solution](#)

b) (0,75 pt) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{2} - 2}{2}(u_n - 1)$ et en déduire que la suite (u_n) est décroissante et convergente.

► Afficher / Masquer la solution

2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$.

a) (0,5 pt) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Ecrire u_n en fonction de n puis déduire la limite de la suite (u_n) .

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,25 pt) Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2021}$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1; -1; 1)$ et $B(5; 1; -3)$. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(3; 0; -1)$ et de rayon $R = 3$ et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -2; 1)$.

1) a) (0,25 pt) Calculer la distance ΩA .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que les droites (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,25 pt) Déduire la position relative de la droite (Δ) et la sphère (S) .

► Afficher / Masquer la solution

2) (0,5 pt) Soit le point $M_a(2a - 3; 3 - 2a; a - 1)$ où $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\overrightarrow{AM_a} = (a - 2)\vec{u}$ et déduire que $M_a \in (\Delta)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (0,5 pt) Vérifier que $2x - 2y + z - 9a + 13 = 0$ est une équation du plan (P_a) passant par M_a et perpendiculaire à la droite (Δ) .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que $d(\Omega; (P_a)) = |3a - 6|$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Déterminer les deux valeurs de a pour lesquelles le plan (P_a) est tangent à la sphère (S) .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Nombres complexes (3 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + 5i$, $z_B = 1 - 5i$ et $z_C = 5 - 3i$.

1) (0,25 pt) Déterminer le nombre complexe z_D affixe du point D milieu du segment $[AC]$.

► Afficher / Masquer la solution

2) (0,5 pt) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Déterminer le nombre complexe z_E affixe du point E l'image de B par h .

► Afficher / Masquer la solution

3) (0,5 pt) On considère la rotation R de centre C et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, déterminer l'image de B par R .

► Afficher / Masquer la solution

4) Soit F le point d'affixe $z_F = -1 + i$.

a) (0,25 pt) Vérifier que : $\frac{z_F - z_A}{z_D - z_A} \times \frac{z_D - z_E}{z_F - z_E} = -1$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) En déduire que : $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}) = \pi [2\pi]$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Déterminer la forme trigonométrique du nombre $\frac{z_E - z_F}{z_A - z_F}$ et en déduire la nature du triangle AEF.

► Afficher / Masquer la solution

d) (0,5 pt) Déduire que les points A, D, E et F appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 4 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient trois boules blanches, quatre boules rouges et cinq boules vertes, indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

1) On considère les événements suivants : - A : « Obtenir exactement deux boules rouges » - B : « Obtenir exactement une boule verte »

a) (0,75 pt) Montrer que : $p(A) = \frac{12}{55}$ et $p(B) = \frac{21}{44}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,75 pt) Calculer $p(A/B)$: la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

► Afficher / Masquer la solution

2) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées.

a) (1 pt) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes.

► Afficher / Masquer la solution

Problème — Etude des fonctions numériques et calcul intégral (8,5 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^4(\ln x - 1)^2 & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1) (0,75 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (0,5 pt) Montrer que f est continue à droite en 0.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement.

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (0,75 pt) Montrer que $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2 \ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Dresser le tableau de variations de f .

► Afficher / Masquer la solution

4) a) (0,5 pt) Sachant que $f''(x) = 2x^2(6 \ln x - 5) \ln x$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Dédurre que la courbe (C) admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses.

► Afficher / Masquer la solution

5) a) (1 pt) Construire la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (On prend : $\sqrt{e} \simeq 1,6$ et $e^2 \simeq 7,2$).

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) En utilisant la courbe (C) , déterminer le nombre de solutions de l'équation : $x^2(\ln x - 1) = -1$.

► Afficher / Masquer la solution

6) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|)$.

a) (0,5 pt) Montrer que la fonction g est paire.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Construire (C_g) la courbe représentative de g dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

► Afficher / Masquer la solution

7) a) (0,5 pt) On pose $I = \int_1^e x^4(\ln x - 1) dx$, en utilisant une intégration par parties, montrer que $I = \frac{6 - e^5}{25}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $h(x) = x^5(\ln x - 1)^2$. Vérifier que $h'(x) = 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1)$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Dédurre que $\int_1^e f(x) dx = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}I$.

► Afficher / Masquer la solution

d) (0,5 pt) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

► Afficher / Masquer la solution