Examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2021

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (les deux parcours) — option française Code NS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

INSTRUCTIONS GENERALES

— L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
— Le candidat peut traiter les exercices selon l'ordre qui lui convient
— L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème Indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	4 points
Exercice 2	Nombres complexes	5 points
Exercice 3	Fonctions numériques	3 points
Problème	Etude des fonctions et calcul intégral	8 points

— On désigne par $\overline{Z}$ le conjugué du nombre complexe Z
— Ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 : Suites numériques (4 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{3-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. *(0.5 pt)* Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

2.a. *(0.5 pt)* Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n-1)^2}{3-u_n}$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

2.b. *(0.5 pt)* Montrer que la suite (u_n) est convergente

▶ **Afficher / Masquer la solution**

3. On pose $v_n = \dfrac{1}{1-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

3.a. *(0.75 pt)* Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme

▶ **Afficher / Masquer la solution**

3.b. *(0.75 pt)* Déterminer v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = \dfrac{n+1}{n+3}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

3.c. *(0.5 pt)* Calculer la limite de la suite (u_n)

▶ **Afficher / Masquer la solution**

4. *(0.5 pt)* A partir de quelle valeur de l'entier naturel n, a-t-on $u_n > \dfrac{1011}{1012}$?

▶ **Afficher / Masquer la solution**

Exercice 2 : Nombres complexes (5 points)

1. *(0.75 pt)* Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 6z + 13 = 0$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère Les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que : $a = 3 + 2i$, $b = 3 - 2i$ et $c = -1 - 2i$.

2.a. *(0.5 pt)* Ecrire $\dfrac{c-b}{a-b}$ sous forme trigonométrique

▶ **Afficher / Masquer la solution**

2.b. *(0.5 pt)* En déduire la nature du triangle ABC

▶ **Afficher / Masquer la solution**

3. Soit R la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Soit M un point du plan d'affixe z et le point M' d'affixe z' l'image de M par R, et soit D le point d'affixe $d = -3 - 4i$.

3.a. *(0.5 pt)* Ecrire z' en fonction de z

▶ **Afficher / Masquer la solution**

3.b. *(0.25 pt)* Vérifier que C est l'image de A par R

▶ **Afficher / Masquer la solution**

4.a. *(0.5 pt)* Montrer que les points A, C et D sont alignés

▶ **Afficher / Masquer la solution**

4.b. *(0.5 pt)* Déterminer le rapport de l'homothétie h de centre C et qui transforme A en D

▶ **Afficher / Masquer la solution**

4.c. *(0.5 pt)* Déterminer l'affixe m du point E pour que le quadrilatère $BCDE$ soit un parallélogramme

▶ **Afficher / Masquer la solution**

5.a. *(0.5 pt)* Montrer que $\dfrac{d-a}{m-b}$ est un nombre réel

▶ **Afficher / Masquer la solution**

5.b. *(0.5 pt)* En déduire que le quadrilatère $ABED$ est un trapèze isocèle

► **Afficher / Masquer la solution**

Exercice 3 : Fonctions numériques (3 points)

On considère la fonction numérique h définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x) = x + \ln x$

1. *(0.5 pt)* Montrer que la fonction h est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

► **Afficher / Masquer la solution**

2. *(0.5 pt)* Déterminer $h\left(]0,+\infty[\right)$

► **Afficher / Masquer la solution**

3.a. *(0.5 pt)* En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0,+\infty[$

► **Afficher / Masquer la solution**

3.b. *(0.5 pt)* Montrer que $0 < \alpha < 1$

► **Afficher / Masquer la solution**

4.a. *(0.5 pt)* Vérifier que $h\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$

► **Afficher / Masquer la solution**

4.b. *(0.5 pt)* En déduire que $h\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) > 2$

► **Afficher / Masquer la solution**

Problème (8 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - xe^{-x+1}$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité :$1cm$)

1. *(0.5 pt)* Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement

▶ **Afficher / Masquer la solution**

2.a. *(0.5 pt)* Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

2.b. *(0.75 pt)* Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement

▶ **Afficher / Masquer la solution**

3.a. *(0.75 pt)* Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = (x-1)e^{-x+1}$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

3.b. *(0.5 pt)* Dresser le tableau de variations de la fonction f

▶ **Afficher / Masquer la solution**

4.a. *(0.5 pt)* Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

4.b. *(0.5 pt)* Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion d'abscisse 2

▶ **Afficher / Masquer la solution**

5. *(1 pt)* Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ (on prend : $f(2) \simeq 1{,}25$)

▶ **Afficher / Masquer la solution**

6. *(0.5 pt)* Déterminer la valeur minimale de la fonction f et en déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$ $e^{x-1} \geq x$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

7.a. *(0.5 pt)* En utilisant une intégration par parties, calculer : $\displaystyle\int_0^2 xe^{-x}\,dx$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

7.b. *(0.5 pt)* En déduire que : $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 4 - e + 3e^{-1}$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

8. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 1]$.

8.a. *(0.5 pt)* Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

▶ **Afficher / Masquer la solution**

8.b. *(0.75 pt)* Construire la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

8.c. *(0.25 pt)* A partir de la courbe représentative de g^{-1}, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{g^{-1}(x)}{x}\right)$.

▶ **Afficher / Masquer la solution**