

Examen national du baccalauréat

Session normale 2018

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (les deux parcours) — option française Code NS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

INSTRUCTIOS GENERALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique et des suites numériques	11 points

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0, -2, -2)$, $B(1, -2, -4)$ et $C(-3, -1, 2)$.

1) (1 pt) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et en déduire que $2x + 2y + z + 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

► Afficher / Masquer la solution

2) (0.5 pt) On considère la sphère (S) dont une équation est $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$. Vérifier que la sphère (S) a pour centre $\Omega(1, 0, 1)$ et pour rayon $R = 5$.

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (0.25 pt) Vérifier que $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC) .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) Déterminer les coordonnées de H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) .

► Afficher / Masquer la solution

4) (0.75 pt) Vérifier que $d(\Omega, (ABC)) = 3$, puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4, dont on déterminera le centre.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

1) (0.75 pt) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes : $2z^2 + 2z + 5 = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a) (0.25 pt) Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) On considère le point A d'affixe $a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et le point B image du point A par la rotation R ; soit b l'affixe du point B , montrer que $b = da$.

► Afficher / Masquer la solution

3) Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et C l'image de B par la translation T et c l'affixe de C .

a) (0.75 pt) Vérifier que $c = b + a$ et en déduire que $c = a \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$ (on pourra utiliser la question 2)b)).

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.75 pt) Déterminer $\arg \left(\frac{c}{a} \right)$ puis en déduire que le triangle OAC est équilatéral.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : cinq boules rouges portant les nombres 1; 1; 2; 2; 2 et quatre boules blanches portant les nombres 1; 2; 2; 2.

On considère l'expérience suivante : on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Soient les événements : - A : « les trois boules tirées sont de même couleur » - B : « les trois boules tirées portent le même nombre » - C : « les trois boules tirées sont de même couleur et portent le même nombre »

1) (1.5 pt) Montrer que $p(A) = \frac{1}{6}$, $p(B) = \frac{1}{4}$ et $p(C) = \frac{1}{42}$.

► Afficher / Masquer la solution

2) On répète l'expérience précédente trois fois avec remise dans l'urne des trois boules tirées après chaque tirage, et on considère la variable aléatoire X qui est égale au nombre de fois la réalisation de l'événement A .

a) (0.5 pt) Déterminer les paramètres de la variable aléatoire binomiale X .

► Afficher / Masquer la solution

b) (1 pt) Montrer que $p(X = 1) = \frac{25}{72}$ et calculer $p(X = 2)$.

► Afficher / Masquer la solution

Problème (11 points)

I — Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$.

Le tableau de variations de g (donné dans l'énoncé) indique que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ à $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

1) (0.25 pt) Vérifier que $g(0) = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

2) (0.5 pt) Déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $] -\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

II — Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1) a) (0.5 pt) Vérifier que $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.75 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ puis en déduire que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote (D) au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = x$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.5 pt) Vérifier que $f(x) = \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

► Afficher / Masquer la solution

d) (0.5 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (0.25 pt) Montrer que $f(x) - x$ et $x^2 - x$ ont le même signe pour tout x de $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) En déduire que $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (D) sur chacun des intervalles $] -\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$, et en dessous de (D) sur l'intervalle $[0, 1]$.

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (0.75 pt) Montrer que $f'(x) = g(x)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) En déduire que la fonction f est décroissante sur $] -\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.25 pt) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

► Afficher / Masquer la solution

4) a) (0.25 pt) Vérifier que $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) En déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet deux points d'inflexion d'abscisses respectives 1 et 4.

► Afficher / Masquer la solution

5) (1 pt) Construire (D) et (C) dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on prend : $f(4) \approx 4,2$).

► Afficher / Masquer la solution

6) a) (0.5 pt) Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire que $\int_0^1 x^2e^{-x} dx = \frac{2e - 5}{e}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.75 pt) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 xe^{-x} dx = \frac{e - 2}{e}$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.75 pt) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) , (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

► Afficher / Masquer la solution

III — Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) (0.75 pt) Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on pourra utiliser la question II-3)b)).

► Afficher / Masquer la solution

2) (0.5 pt) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

► Afficher / Masquer la solution

3) (0.75 pt) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

► Afficher / Masquer la solution