

Série d'exercices n° 07

Nombres complexes

2^{ème} Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Dans toute la série, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 1 — Forme algébrique

★★★★★

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1}{3+4i} ; \quad z_2 = \frac{2-i}{1+3i} ; \quad z_3 = (1+2i)^2 ; \quad z_4 = i^{2027} ; \quad z_5 = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^3 ;$$

$$z_6 = \frac{1}{2+i} + \frac{1}{2-i} + \frac{i}{5} ; \quad z_7 = \frac{(2-i)^3 - (1+i)^3}{(1-2i)^3 + (1-i)^2}.$$

Exercice 2 — Équation, rotation, valeurs remarquables

★★★★★

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.
- On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_B = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_C = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$.
On note A' l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe de A' , puis montrer que le triangle $AA'C$ est isocèle en A' .
- On note B' l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
 - Exprimer $z_{B'}$ en fonction de z_B .
 - En déduire une forme trigonométrique de $z_{B'}$.
 - Déterminer la forme algébrique de $z_{B'}$.
 - En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et de $\sin \frac{5\pi}{12}$.

Exercice 3 — Équation et rotation

★★★★★

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.
- On considère les points A , B et Ω d'affixes respectives $a = 3$, $b = 3 + 4i$ et $\omega = 1 + 2i$.
 - On pose $u = b - \omega$. Vérifier que $u = 2 + 2i$, puis montrer que $\arg(u) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.
 - Déterminer un argument du nombre $\bar{u}$.
 - Vérifier que $a - \omega = \bar{u}$, puis en déduire que $\Omega A = \Omega B$ et que $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
 - On note R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'image du point A par R .

Exercice 4 — Alignement, rotation, triangle

★★★★★

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2z + 4 = 0$.
- On considère les points A , B , C et D d'affixes respectives $a = -1 + i\sqrt{3}$, $b = 2 + 2i$, $c = -\sqrt{3} - i$ et $d = 2 - 2\sqrt{3}$.
 - Vérifier que $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$.
 - En déduire que les points A , C et D sont alignés.
- On considère un point M d'affixe z et son image M' , d'affixe z' , par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Vérifier que $z' = \frac{1}{2}az$.
- On note H l'image de B par R , d'affixe h , et P le point d'affixe $p = a - c$.
 - Vérifier que $h = ip$.
 - Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O .

Exercice 5 — Construction géométrique

★★★★★

On considère les points A , B , C et D d'affixes respectives $a = 1$, $b = 1 + 2i$, $c = 1 + \sqrt{3} - i$ et $d = 1 - \sqrt{3} - i$. Le but de l'exercice est de construire les points C et D à la règle et au compas.

1. a. Montrer que le point D est l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
 b. En déduire que B et D appartiennent à un même cercle (Γ) de centre A , dont on précisera le rayon.
2. On note F l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.
 a. Montrer que F a pour affixe $z_F = 1 - i$.
 b. Montrer que F est le milieu du segment $[CD]$.
 c. Montrer que $\frac{c - z_F}{a - z_F} = -i\sqrt{3}$.
 d. En déduire une forme exponentielle du nombre $\frac{c - z_F}{a - z_F}$.
3. Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment $[CD]$.

Exercice 6 — Ensembles de points

★★★★★

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition indiquée :

1. $|z - 2 + i| = 3$;
2. $|z - 1 + 2i| = |z + 3 - i|$;
3. $\frac{z + 2i}{z - 4 + i} \in \mathbb{R}$;
4. $\frac{z + 2i}{z - 4 + i} \in i\mathbb{R}$;
5. $\frac{1 + iz}{1 - z} \in i\mathbb{R}$;
6. $\frac{z - 2}{iz} \in i\mathbb{R}$;
7. $|z + 1 - 3i| = 2$;
8. $|iz + 3 - i| = 4$;
9. $|z - 2 - i| = |z + 1 - 2i|$;
10. $z\bar{z} + (z + \bar{z}) - i(z - \bar{z}) = -2$;
11. $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Exercice 7 — Forme trigonométrique et alignement

★★★★★

On considère les nombres complexes $a = 2 - \sqrt{3} + i$, $b = 1 - (2 - \sqrt{3})i$ et $c = -\sqrt{3} + i$.

1. Montrer que $a = ib$.
2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2(2 - \sqrt{3})z + 4(2 - \sqrt{3}) = 0$.
 a. Montrer que a est une solution de l'équation (E) .
 b. En déduire que $a^2 = 2(2 - \sqrt{3})c$.
 c. Déterminer le module et un argument du nombre complexe c .
 d. En déduire une forme trigonométrique du nombre complexe a .
 e. Montrer que $\arg\left(\frac{a}{b}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
3. On considère les points A , B et C d'affixes respectives a^2 , b^2 et c .
 a. Montrer que A est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle π .
 b. Montrer que les points A , B , C et O sont alignés.

Exercice 8 — Rotation, translation, carré

★★★★★

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 5 = 0$.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 3$ et $b = 2 - i$.
 a. On considère un point M d'affixe z et son image M' , d'affixe z' , par la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Montrer que $z' = -iz + 3 + 3i$.

- b. Vérifier que l'affixe du point C , image de B par R , est $c = 2 + i$.
- c. En déduire la nature du triangle ABC .
3. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et D l'image de C par t .
 - a. Déterminer l'affixe d du point D .
 - b. En déduire la nature du quadrilatère $ABDC$.
 - c. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2 - i| = |2 + i|$.

Exercice 9 — Carré et triangle équilatéral

★★★★★

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2\sqrt{3} - 2i$ et $b = 2 + 2\sqrt{3}i$.
 - a. Écrire a et b sous forme trigonométrique, puis vérifier que a^{18} est un nombre réel.
 - b. Montrer que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O .
3. a. Déterminer l'affixe du point E , image de A par la translation t de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
b. Montrer que $OAEB$ est un carré.
4. On considère la rotation R de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, qui transforme le point M d'affixe z en M' d'affixe z' .
 - a. Montrer que $z' = -iz + 2 - 2\sqrt{3} + (2 + 2\sqrt{3})i$.
 - b. En déduire que l'affixe du point C , image de A par R , est $c = -2\sqrt{3} + 2i$.
5. On considère le point D d'affixe $d = 2\sqrt{3} + 6i$.
 - a. Montrer que les points O , B et D sont alignés.
 - b. Montrer que $\frac{d-c}{a-c} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, puis en déduire que le triangle ADC est équilatéral.

Exercice 10 — Transformation $z' = az + b$

★★★★★

On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = -3z + 8 + 4i$. Déterminer l'unique point invariant de f , puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

Exercice 11 — Homothétie et cocyclicité

★★★★★

On considère les points A , B , S et Ω d'affixes respectives $a = 2 + i$, $b = -i$, $s = -1 + 2i$ et $\omega = 2 - i$. On note h l'homothétie de centre S et de rapport 3, et C et D les images respectives de A et B par h .

1. a. Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h .
b. Montrer que C et D ont pour affixes respectives $c = 8 - i$ et $d = 2 - 7i$.
c. Montrer que les points A , B , C et D sont cocycliques.
2. On note P le milieu du segment $[AC]$.
 - a. Déterminer l'affixe p du point P .
 - b. Montrer que $\frac{\omega - p}{b - d} = \frac{1}{2}i$, puis en déduire que $DB = 2P\Omega$ et $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{P\Omega}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Exercice 12 — Formules d'Euler

★★★★★

1. Linéariser $\sin^2(x) \cos^3(2x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. À l'aide des formules d'Euler, montrer que, pour tous réels a et b : $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$.