

Série d'exercices n° 06

Fonctions logarithmes

2^{ème} Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1 — Équations et systèmes

★★★★★

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $(E_1) : \ln(x+2) = \ln(4-x)$; $(E_2) : \ln(x^2 - 2x + 3) = \ln 6$; $(E_3) : \ln^2 x - 3 \ln x + 2 = 0$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} \ln x + 2 \ln y = 4 \\ 3 \ln x - \ln y = 5 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} \ln x - 2 \ln y = 1 \\ xy = e^4 \end{cases}$$

Exercice 2 — Inéquations, seuils, logarithmes de base a

★★★★★

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $(I_1) : \ln(3x-2) \leq 0$; $(I_2) : \ln(x^2 + x + 1) > 0$; $(I_3) : \ln^2 x - \ln x - 2 \leq 0$.
- Déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant chacune des inégalités suivantes :
 - $2 \times 3^n - 7 \geq 100$;
 - $\left(\frac{3}{4}\right)^n < 0,01$;
 - $100 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 99,999$.
- Montrer que $\log_2 5 \log_3 5 + \log_3 5 \log_7 5 + \log_7 5 \log_2 5 = \frac{\log_2 5 \log_3 5 \log_7 5}{\log_{42} 5}$.
- On considère un réel $a > 1$ et un entier $n \geq 1$. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\log_{a^n}(x) = \frac{1}{n} \log_a(x)$.

Exercice 3 — Étude d'une fonction avec $\ln^2$

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{(1 + \ln x)^2}{x}$.

- Calculer $f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
- Vérifier que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Déterminer les deux branches infinies de (C_f) .
- Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{(1 + \ln x)(1 - \ln x)}{x^2}$.
- Dresser le tableau de variations de f .
- Montrer que la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{3}(1 + \ln x)^3$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Exercice 4 — Fonction composée et réciproque

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x + 2\sqrt{x})$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis en déduire une branche infinie de (C_f) .
- Déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- Étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$, puis dresser son tableau de variations.
- Construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- Construire la courbe $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice 5 — *Fonction et suite récurrente*

★★★★★

Partie I. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x + 2)$.

1. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$, puis en déduire que f est strictement croissante sur cet intervalle.
2. Étudier la continuité de f sur $]0; +\infty[$, puis déterminer $f([0; e - 2])$.
3. Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [0; e - 2]$.

Partie II. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n \ln(u_n + 2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq e - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle converge.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 6 — *Étude complète, primitive et suite*

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 2 \ln x$.

1. Calculer $f(1)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Déterminer les deux branches infinies de (C_f) .
3. Étudier la continuité de f sur $]0; +\infty[$.
4. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x-2}{x}$.
5. Dresser le tableau de variations de f , puis en déduire le signe de $f(x)$.
6. Étudier la position relative de (C_f) et de la droite d'équation $y = x$.
7. Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
8. Montrer que la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2x \ln x + 2x - 3$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
9. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2} \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle converge.
 - c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 7 — *Fonction auxiliaire et étude*

★★★★★

Partie I. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

1. Calculer $g(1)$.
2. Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$, puis en déduire le sens de variation de g .
3. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

Partie II. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis en déduire une branche infinie de (C_f) .
2. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.
3. Étudier la position relative de (C_f) et de la droite d'équation $y = x$.
4. a. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
b. Dresser le tableau de variations de f .
5. a. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{3 - 2 \ln x}{x^3}$.
b. En déduire que (C_f) admet un point d'inflexion A et déterminer ses coordonnées.
6. Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 8 — *Fonction, inégalité et parité*

★★★★★

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - \ln(2x + 1)$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f , puis calculer ses limites aux bornes de D_f .
2. Déterminer les branches infinies de (C_f) .
3. a. Montrer que, pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{2(2x-1)(x+1)}{2x+1}$.

- b. Dresser le tableau de variations de f .
- c. En déduire que, pour tout $x \in D_f$, $\ln(2x + 1) \leq x^2 - \frac{1}{4} + \ln 2$.
- 4. Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 5. On considère la restriction g de f à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.
 - a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 - b. Construire la courbe $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.
- 6. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 - \ln(2|x| + 1)$.
 - a. Montrer que h est paire.
 - b. Construire la courbe (C_h) dans un autre repère.

Exercice 9 — *Problème : fonction auxiliaire, inflexion, réciproque*

★★★★★

Partie I. On considère la fonction g définie sur $]2; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x}{x-2} + \ln(x-2)$.

- 1. Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in]2; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g (on admet que $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = +\infty$).
- 2. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

Partie II. On considère la fonction f définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x-2)$.

- 1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2. Déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- 3. Étudier la position relative de (C_f) et de la droite d'équation $y = x$.
- 4. a. Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout $x \in]2; +\infty[$.
b. Dresser le tableau de variations de f .
- 5. Montrer que le point $I(4; 4 \ln 2)$ est un point d'inflexion de (C_f) .
- 6. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point I .
- 7. Construire la droite (T) et la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 8. a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
b. Montrer que f^{-1} est dérivable en 0, puis déterminer $(f^{-1})'(0)$.
- 9. Construire la courbe $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère.