

Série d'exercices n° 04

Suites numériques

2^{ème} Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1 — Suite homographique et suite arithmétique

★★★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{4}{4 - u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer par récurrence que $u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
4. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Calculer v_0 et v_1 .
 - b. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.
 - c. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
5.
 - a. Calculer, en fonction de n , la somme $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 - b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 2 — Récurrence et monotonie

★★★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n < 3$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n + 1)(u_n - 3)}{u_n + 2}$.
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 3 — Suite récurrente du second degré

★★★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{3}u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < \frac{1}{3}$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 4 — Minoration et limite infinie

★★★★★

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}}$.

1. Montrer que $u_n \geq \frac{n}{\sqrt{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 5 — Somme géométrique

★★★★★

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1 + \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{5}\right)^n$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 6 — Majoration de l'écart à la limite

★★★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 \leq \frac{2}{5}(u_n - 1)$.
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 \leq 2\left(\frac{2}{5}\right)^n$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 7 — Suite arithmético-géométrique

★★★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
2. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 8 — Suite $u_{n+1} = f(u_n)$

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $I = [1; 3]$ par $f(x) = \frac{4x - 1}{x + 2}$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur I .
2. Montrer que $f(I) \subset I$.
3. Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout $x \in I$.
4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n \leq 2$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
 - c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.
 - b. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
 - c. Retrouver la limite de la suite (u_n) .

Exercice 9 — Encadrement

★★★★★

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$.
2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 10 — Suite récurrente affine

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $I = [0; 6]$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$, et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $f(I) \subset I$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 6$.
3. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 6$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
 - b. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
 - c. Retrouver la limite de la suite (u_n) .

Exercice 11 — Suite auxiliaire arithmétique

★★★★★

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = \frac{2}{u_n - 1}$.
 - a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$; en déduire que $(v_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithmétique de raison 1.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n , puis en déduire que $u_n = 1 + \frac{6}{3n - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - c. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 12 — Suite auxiliaire géométrique et seuil

★★★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $u_n < 9$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = 9 - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$, puis exprimer v_n en fonction de n .
 - b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 9 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$, puis déterminer la limite de la suite (u_n) .
3. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 8,99$.

Exercice 13 — Suite avec racine carrée

★★★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{(1 + 2\sqrt{u_n})^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. a. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(1 + 2\sqrt{u_n})^2} < 1$.
 b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.
3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{\sqrt{u_n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n , puis montrer que $u_n = \frac{1}{(2n + 1)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - c. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 14 — Problème : quatre méthodes pour une même limite

★★★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie I

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer par récurrence que $u_n > 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)(u_n - 4)}{u_n}$.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

Partie II

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 4 \leq \frac{1}{4}(u_n - 4)$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 4 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Partie III. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 1}$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme.

2. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .

3. Retrouver la limite de la suite (u_n) .

Partie IV. On considère la fonction f définie sur $I = [4; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x - 4}{x}$.

1. Étudier les variations de f sur I .

2. Vérifier que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer par récurrence que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Vérifier que $f(I) \subset I$.

5. Retrouver la limite de la suite (u_n) .