

Série d'exercices n° 03

Étude de fonctions

2^{ème} Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1 — Branches infinies, position relative, réciproque

★★★★★

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x - 2 + \sqrt{x-1}$.

- Vérifier que $D_f = [1; +\infty[$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- Étudier la dérivabilité de f à droite en 1, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- a. Montrer que, pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{4\sqrt{x-1}+1}{2\sqrt{x-1}}$.
b. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
- a. Montrer que, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f(x) - (2x - 1) = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}$.
b. En déduire la position relative de (C_f) et de la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$.
- Tracer (D) et (C_f) dans un repère orthonormé.
- a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
b. Tracer $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère, avec une autre couleur.

Exercice 2 — Concavité et réciproque

★★★★★

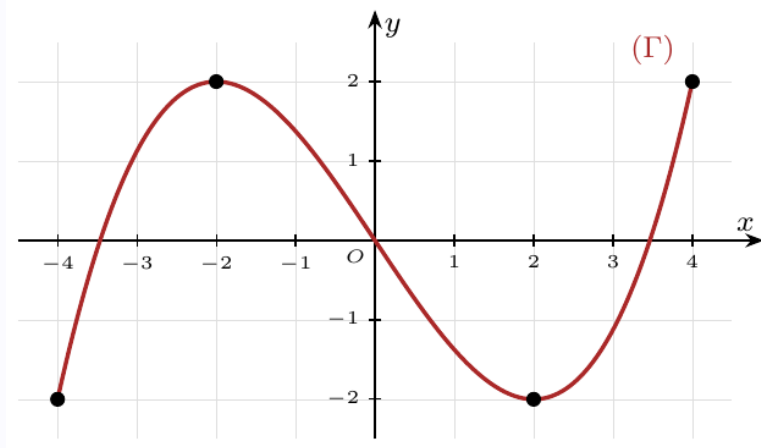
On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x-2}$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Justifier que f est continue sur $[2; +\infty[$.
- Déterminer la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- Étudier la dérivabilité de f à droite en 2, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- a. Montrer que, pour tout $x \in]2; +\infty[$, $f'(x) = \frac{3x-4}{2\sqrt{x-2}}$.
b. En déduire le sens de variation de f .
- a. Montrer que, pour tout $x \in]2; +\infty[$, $f''(x) = \frac{3x-8}{4\sqrt{(x-2)^3}}$.
b. Étudier la concavité de (C_f) et préciser son point d'inflexion.
- Étudier la position relative de (C_f) et de la droite (Δ) d'équation $y = x$.
- Tracer (Δ) et (C_f) dans un repère orthonormé.
- a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
b. Montrer que f^{-1} est dérivable en 12 et calculer $(f^{-1})'(12)$ (on remarquera que $f(6) = 12$).
- Tracer $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère, avec une autre couleur.

Exercice 3 — Lecture graphique de la dérivée

★★★★★

On considère une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4; 4]$. La courbe (Γ) ci-dessous représente sa fonction dérivée f' ; elle coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $-2\sqrt{3}$, 0 et $2\sqrt{3}$, et admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses -2 et 2 .



1. Dresser le tableau de variations de f sur $[-4; 4]$.
2. Étudier la concavité de (C_f) sur $[-4; 4]$ et préciser les abscisses de ses points d'inflexion.

Exercice 4 — Fonction avec racine carrée et asymptote verticale

★★★★★

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x} - 2}$.

1. Vérifier que $D_f = [0; 4[\cup]4; +\infty[$, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .
2. Déterminer les deux branches infinies de (C_f) .
3. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
4. a. Montrer que, pour tout $x \in D_f \setminus \{0\}$, $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 4}{2(\sqrt{x} - 2)^2}$.
b. Dresser le tableau de variations de f .
5. Montrer que (C_f) coupe la droite d'équation $y = x$ en deux points distincts dont on déterminera les coordonnées.
6. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé. On admet que le point de (C_f) d'abscisse 36 est un point d'inflexion.
7. On considère la restriction g de f à l'intervalle $[0; 4[$. On admet que g admet une fonction réciproque g^{-1} . Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère, avec une autre couleur.

Exercice 5 — Fonction auxiliaire et étude

★★★★★

Partie A. On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 7x^3 + 3x + 2$.

1. Déterminer $u'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Dresser le tableau de variations de u (les limites ne sont pas demandées).
3. En déduire que $u(x) > 0$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.

Partie B. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (x^3 + x + 2)\sqrt{x} - 3$.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, puis déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
2. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
3. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
4. a. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{u(x)}{2\sqrt{x}}$.
b. En utilisant la question A.3, en déduire que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
5. Montrer que (C_f) coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α , puis vérifier que $0,8 < \alpha < 0,9$.
6. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.
7. Tracer (T) et (C_f) dans un repère orthonormé. On admet que (C_f) possède un point d'inflexion d'abscisse $\beta \simeq 0,3$.
8. a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
b. Tracer $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère, avec une autre couleur.

Exercice 6 — Fonction rationnelle et asymptote oblique



Partie A. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + x^2 + 3x - 1$.

1. Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x .

Partie B. On considère la fonction f définie par $f(x) = x + \frac{2}{x^2 + 1}$.

1. Déterminer D_f , puis calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Étudier la continuité de f sur D_f .
3. Montrer que, pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{(x-1)g(x)}{(x^2+1)^2}$.
4. Étudier les variations de f , puis dresser son tableau de variations.
5. Vérifier que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.
6. Étudier la position relative de (C_f) et de (Δ) .
7. On considère la restriction h de f à l'intervalle $I = [1; +\infty[$.
 - a. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 - b. Dresser le tableau de variations de h^{-1} .

Exercice 7 — Fonction définie par morceaux — synthèse



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 4x} \quad \text{si } x \geq 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}} \quad \text{si } x < 0.$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. a. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
4. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 2$.
b. En déduire que (C_f) admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ dont on donnera une équation.
5. a. Montrer que $f'(x) = 1 + \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$ pour $x > 0$ et $f'(x) = \frac{8}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$ pour $x < 0$.
b. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ et sur $] -\infty; 0[$, puis dresser le tableau de variations de f .
6. a. Montrer que $f''(x) = \frac{-4}{(x^2+4x)\sqrt{x^2+4x}}$ pour $x > 0$ et $f''(x) = \frac{-24x\sqrt{x^2+4}}{(x^2+4)^3}$ pour $x < 0$.
b. En déduire la concavité de (C_f) .
7. Étudier la position relative de (C_f) et de la droite d'équation $y = x$.
8. On considère la restriction g de f à l'intervalle $I =]-\infty; 0[$.
 - a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 - b. Montrer que $g^{-1}(-1) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, puis en déduire la valeur de $(g^{-1})'(-1)$.
 - c. Montrer que, pour tout $x \in J$, $g^{-1}(x) = \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$.
 - d. Tracer (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère orthonormé.