

Série d'exercices n° 02

Dérivation

2^{ème} Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1 — Continuité, dérivabilité et réciproque

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - x - x^3 \quad \text{si } x < 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 1 \quad \text{si } x \geq 1.$$

1. Étudier la continuité de f en 1.
2. Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1, puis interpréter graphiquement les résultats.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 1[$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -\infty; 1[$, et que $0 < \alpha < 1$.
6. On considère la restriction g de f à l'intervalle $] -\infty; 1[$. Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à préciser.

Exercice 2 — Fonction avec racine carrée

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x - 6\sqrt{x} + 5$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x^2$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$.
3. On considère la restriction g de f à l'intervalle $I =]9; +\infty[$.
 - a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} et préciser son ensemble de définition J .
 - b. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 3 — Étude et réciproque

★★★★★

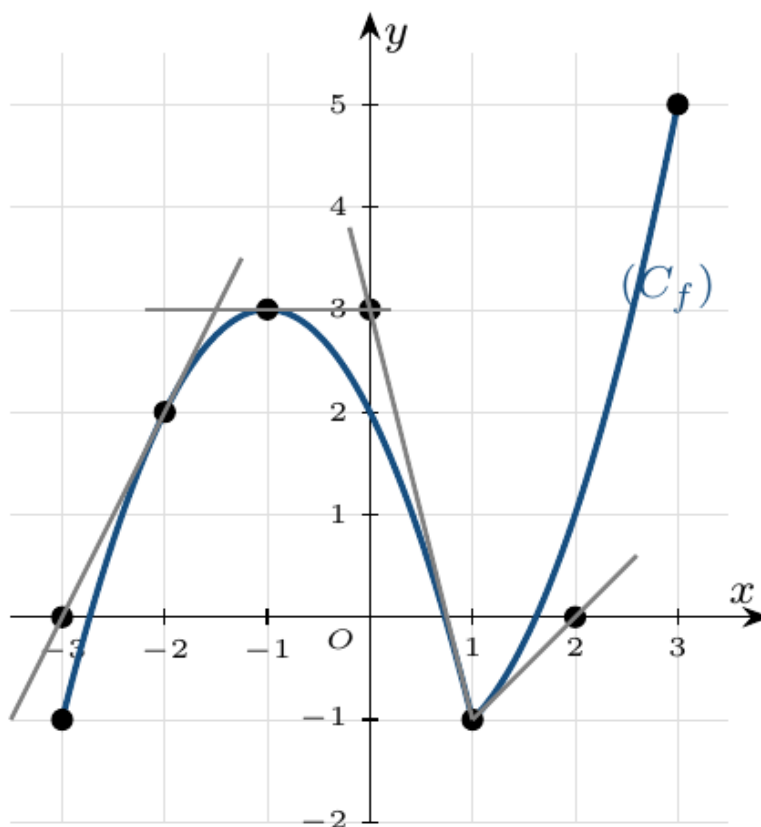
On considère la fonction f définie par $f(x) = 4\sqrt{x-1} - x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Étudier la continuité de f sur D_f .
4. Étudier la dérivabilité de f à droite en 1, puis interpréter géométriquement le résultat.
5. Montrer que, pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{5-x}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+2)}$, puis en déduire les variations de f .
6. On considère la restriction g de f à l'intervalle $I = [5; +\infty[$.
 - a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 - b. Déterminer le sens de variation de g^{-1} sur J .
 - c. Résoudre dans J l'équation $g^{-1}(x) = 10$.
 - d. Exprimer $g^{-1}(x)$ en fonction de x , pour tout $x \in J$.

Exercice 4 — Lecture graphique

★★★★★

La courbe (C_f) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, une fonction f définie et continue sur $[-3; 3]$. Les droites tracées en gris sont des tangentes ou des demi-tangentes à (C_f) .

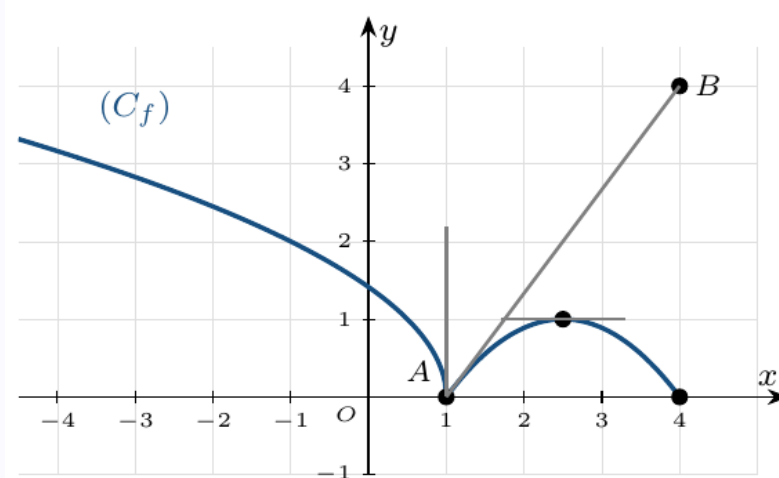


1. Déterminer $f(-2)$, $f'(-2)$ et $f'(-1)$.
2. Déterminer graphiquement le nombre dérivé à droite $f'_d(1)$ et le nombre dérivé à gauche $f'_g(1)$.
3. En déduire que f n'est pas dérivable en 1.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $[-3; 3]$; on donne $f(3) = 5$.
5. En déduire le tableau de signe de $f'(x)$ sur $[-3; 3]$.

Exercice 5 — Lecture graphique — demi-tangentes

★★★★★

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie et continue sur $] -\infty; 4]$, dans un repère orthonormé. Au point $A(1; 0)$, la courbe admet une demi-tangente verticale (à gauche) et une demi-tangente passant par le point $B(4; 4)$ (à droite); au point d'abscisse $\frac{5}{2}$, la tangente est horizontale.



1. Déterminer $f'\left(\frac{5}{2}\right)$. Justifier la réponse.
2. Déterminer $f'_d(1)$. Justifier la réponse.
3. La fonction f est-elle dérivable à gauche en 1? Justifier la réponse.

4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1}$.
5. Dresser le tableau de variations de f sur $] -\infty; 4]$.

Exercice 6 — *Fonction rationnelle, tangente et réciproque*

★★★★★

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 3x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
3. a. Montrer que, pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{3(1-x)(x+3)}{(x^2 - 3x)^2}$.
b. Dresser le tableau de variations de f .
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 2.
5. On considère la restriction g de f à l'intervalle $I =]3; +\infty[$.
a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
b. Dresser le tableau de variations de g^{-1} .
c. Comparer $g^{-1}(3,1234)$ et $g^{-1}(3,1324)$.
d. Vérifier que $g^{-1}\left(\frac{13}{6}\right) = 6$, puis calculer $(g^{-1})'\left(\frac{13}{6}\right)$.
e. Montrer que g^{-1} est dérivable sur J .

Exercice 7 — *Inégalité et réciproque*

★★★★★

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
3. a. Montrer que, pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{x}{2(\sqrt{x+1})^3}$.
b. Dresser le tableau de variations de f .
c. En déduire que, pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $\frac{(x+2)^2}{x+1} \geq 4$.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 3.
5. On considère la restriction g de f à l'intervalle $I = [3; +\infty[$.
a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
b. Montrer que g^{-1} est dérivable en $\frac{10}{3}$, puis calculer $(g^{-1})'\left(\frac{10}{3}\right)$.

Exercice 8 — *Fonction auxiliaire*

★★★★★

Partie 1 — Étude d'une fonction auxiliaire. On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = 3x - 2x\sqrt{x} - 1$.

1. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = 3(1 - \sqrt{x})$.
2. Dresser le tableau de variations de g .
3. En déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$.

Partie 2 — Étude de la fonction f . On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 2(x - 1)\sqrt{x} - x^2 + 3$.

1. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. a. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x}}$.
b. Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 9 — Tangentes et fonction par morceaux

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = x + 3 + \frac{4}{x-2}$.

1. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
 b. Déterminer les points $M(a; f(a))$ de la courbe (C_f) en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < 0, \\ x^3 - 3x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ \sqrt{x^2 - 4} + x + 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Étudier la dérivabilité de h en 0, puis interpréter graphiquement les résultats.

3. a. Étudier la dérivabilité de h en 2, puis interpréter graphiquement les résultats.
 b. Montrer que h est dérivable sur $]2; +\infty[$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x > 2$.
 c. Déterminer une équation de la tangente à la courbe (C_h) au point d'abscisse $2\sqrt{2}$.

Exercice 10 — Réciproques des fonctions sinus et cosinus

★★★★★

1. a. Montrer que la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \sin x$ admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $] -1; 1[$.
 b. Montrer que, pour tout $x \in] -1; 1[$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. a. Montrer que la fonction g définie sur $]0; \pi[$ par $g(x) = \cos x$ admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $] -1; 1[$.
 b. Montrer que, pour tout $x \in] -1; 1[$, $(g^{-1})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. En déduire que, pour tout $x \in] -1; 1[$, $f^{-1}(x) + g^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$.