

Série d'exercices n° 01

Continuité

2^{ème} Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1 — Continuité en un point

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 6}{x - 3} \quad \text{si } x \neq 3 \quad \text{et} \quad f(3) = 11.$$

Montrer que f est continue en 3.

Exercice 2 — Continuité en un point — paramètre

★★★★★

On considère un réel non nul a et la fonction f définie sur $[-4; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{ax} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 2.$$

Déterminer la valeur de a pour laquelle f est continue en 0.

Exercice 3 — Continuité à droite et à gauche

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $[-7; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+7} - 3}{|x-2|} \quad \text{si } x \neq 2 \quad \text{et} \quad f(2) = \frac{1}{6}.$$

Étudier la continuité de f à droite et à gauche en 2.

Exercice 4 — Fonction définie par morceaux

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 3x \quad \text{si } x \leq 2 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{x^2 - 6}{2x - 3} \quad \text{si } x > 2.$$

Étudier la continuité de f en 2.

Exercice 5 — Fonction définie par morceaux — paramètre

★★★★★

On considère un réel a et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^2 + 3 \quad \text{si } x \leq 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{ax - 1}{x + 1} \quad \text{si } x > 1.$$

Déterminer la valeur de a pour laquelle f est continue en 1.

Exercice 6 — Prolongement par continuité

★★★★★

Dans chacun des cas suivants, a est un réel ; déterminer la valeur de a pour laquelle la fonction f est continue en x_0 .

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x^2 - x - 15}{x - 3}$ si $x \neq 3$ et $f(3) = a$; $x_0 = 3$.
- f est définie sur $[-3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$ si $x \neq 1$ et $f(1) = a$; $x_0 = 1$.
- f est définie sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$ par $f(x) = \frac{\tan x + 3 \sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = a$; $x_0 = 0$.

4. f est définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = a$; $x_0 = 0$.

Exercice 7 — Deux paramètres

★★★★★

On considère deux réels a et b et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + ax - 1 \quad \text{si } x < 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{2x^2 - a + b}{x} \quad \text{si } x \geq 1.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit continue en 1.

Exercice 8 — Continuité sur un intervalle

★★★★★

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f sur l'intervalle I .

1. $f(x) = 3x^2 - x + \cos x$ et $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \frac{2}{x} - \sqrt{x}$ et $I =]0; +\infty[$.
3. $f(x) = \frac{2x+5}{x^2-x+1}$ et $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = x^2 \sin x$ et $I = [-\pi; \pi]$.
5. $f(x) = (x^3 - 2)(x^2 + 3x)$ et $I = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ et $I = \mathbb{R}$.
7. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ et $I = [-2; 2]$.
8. $f(x) = \sin(x^2 - 3x + 1)$ et $I = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = \cos(\sqrt{x+1})$ et $I = [-1; +\infty[$.

Exercice 9 — Continuité sur $\mathbb{R}$ d'une fonction définie par morceaux

★★★★★

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ si $x \leq 1$ et $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ si $x > 1$.
2. $f(x) = x - \sqrt{x-2}$ si $x \geq 2$ et $f(x) = \frac{5}{5-x}$ si $x < 2$.

Exercice 10 — Image d'un intervalle

★★★★★

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image $f(I)$ de l'intervalle I par la fonction f .

1. $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ et $I = [-1; 2]$.
2. $f(x) = 3x - 2$ et $I = [1; +\infty[$.
3. $f(x) = \frac{2}{x-1}$ et $I =]-\infty; 0]$.
4. $f(x) = x^2$ et $I = [-2; 1]$.
5. $f(x) = x + 1$ si $x \in]-1; 1[$ et $f(x) = -x + 3$ si $x \in [1; 2[$; $I =]-1; 2[$.

Exercice 11 — Théorème des valeurs intermédiaires

★★★★★

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle I .

1. $f(x) = x^3 + x - 3$ et $I = [1; 2]$.
2. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ et $I =]-1; 0[$.
3. $f(x) = \sin x - x + 1$ et $I = [0; \pi]$.

Exercice 12 — TVI et stricte monotonie

★★★★★

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle I .

1. $f(x) = x^3 + 4x - 2$ et $I = [0; 1]$.
2. $f(x) = x + \tan x - 2$ et $I = [0; \frac{\pi}{3}]$.
3. $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 3$ et $I = [-1; 0]$.

4. $f(x) = x^3 + 3x - 5$ et $I =]1; \frac{3}{2}[$.

Exercice 13 — *Dichotomie*

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x + 2$.

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-2; 2]$.
3. À l'aide de la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude 1.

Exercice 14 — *Unicité, encadrement et inéquation*

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $1 < \alpha < 2$.
2. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,25.
3. Résoudre dans $[1; 2]$ l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 15 — *Existence de solutions*

★★★★★

1. Montrer que l'équation $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in]0; 1[$, puis donner un encadrement de α d'amplitude 0,5.
2. Montrer que l'équation $\frac{3x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 2$ admet au moins une solution dans $[0; 2]$.

Exercice 16 — *Signe d'une fonction*

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x - 5$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Vérifier que $1 < \alpha < 2$, puis donner un encadrement de α d'amplitude 0,25.
4. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 — *Fonction réciproque*

★★★★★

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = f(I)$; préciser J , puis déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

1. $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ et $I =]-\infty; -3[$.
2. $f(x) = x^2 - 6x + 5$ et $I = [3; 5]$.
3. $f(x) = -3(x+1)^2 + 2$ et $I = [-1; +\infty[$.
4. $f(x) = \sqrt{x-1} + x$ et $I = [1; +\infty[$.
5. $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$ et $I = [-2; 2]$.
6. $f(x) = \sqrt[3]{x+2} - 1$ et $I = [-2; +\infty[$.
7. $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-1}$ et $I = [0; 1[$.
8. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ et $I = [-1; +\infty[$.

Exercice 18 — *Racines n -ièmes — calculs*

★★★★★

1. Comparer les nombres $a = \left(\sqrt[6]{25}\right)^3$, $b = \sqrt{\sqrt[3]{64}}$ et $c = \sqrt[3]{\sqrt{7}}$.
2. Simplifier le nombre

$$A = \frac{3^{\frac{4}{3}} \times \sqrt[6]{3^{-2}} \times \left(\sqrt[5]{9}\right)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{3} \times \left(\sqrt[4]{3}\right)^2}.$$

3. Ranger dans l'ordre croissant les nombres : $\sqrt[4]{10}$; $\sqrt[3]{6}$; $\sqrt[12]{500}$; $\sqrt[6]{30}$; $\sqrt{3}$.
4. Rendre rationnel le dénominateur de chacune des expressions suivantes :

- a. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$;
 b. $\frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}}$;
 c. $\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}+1}$;
 d. $\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$.

Exercice 19 — *Limites et racines n-ièmes*

★★★★★

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}$	2. $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{x-64}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}$	4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x-2}-1}{\sqrt{x+1}-2}$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+2x}-3x)$	6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x)$
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{2x^2+x+5}$	8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}{x}$
9. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt[3]{3x+2}-2}$	10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x})$
11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x+15}-2}$	12. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-\sqrt{x+12}}{\sqrt{2x+1}-3}$
13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x}}{\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x^2}}}$	14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2})$
15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1}+2}{\sqrt[3]{x+1}-1}$	16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x}$

Exercice 20 — *Équations et inéquations*

★★★★★

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

- $(E_1) : (x+2)^3 - 8 = 0.$
- $(E_2) : (x^2+3)^4 = 256.$
- $(E_3) : \sqrt[3]{x+6} - \sqrt[3]{x-1} = 1.$
- $(E_4) : (\sqrt[3]{x})^2 - 5\sqrt[3]{x} + 6 = 0.$
- $(E_5) : x + \sqrt[3]{x} = 10.$
- $(E_6) : \sqrt[3]{x^2-2x} = -1.$
- $(I_1) : x+1 > \sqrt[3]{x^2+7}.$
- $(I_2) : \sqrt{x+6} \leq x.$