

Examen blanc du semestre 1 — Durée : 3 heures

Programme du semestre 1 (chapitres 01 à 07)

2^{ème} Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — barème

Exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 3,5 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 3 points ; problème : 7,5 points ; total sur 20. Le barème de chaque question est indiqué entre crochets. Deux questions **bonus** (+0,5 pt chacune) ; la note est plafonnée à 20.

Exercice 1 — Suites numériques — 3 points

★★★★★

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$, et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - 3$.

- 1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. [1 pt]
- 2) Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n , et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. [1 pt]
- 3) On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Montrer que $S_n = 3n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$. [1 pt]

Bonus [+0,5 pt]. Déterminer, à l'aide de la fonction $\ln$, le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - 3| < 10^{-3}$.

Exercice 2 — Suites numériques — 3,5 points

★★★★★

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

- 1) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. [1 pt]
- 2) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}$. [0,5 pt]
 b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente. [0,5 pt]
- 3) On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$, et calculer v_0 . [0,75 pt]
- 4) Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n , et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. [0,75 pt]

Exercice 3 — Nombres complexes — 3 points

★★★★★

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. [1 pt]

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et C d'affixes respectives $a = \sqrt{3} + i$ et $c = 2i$.

- 2) Écrire a sous forme trigonométrique. [0,5 pt]
- 3) En déduire, à l'aide de la formule de Moivre, que a^6 est un nombre réel que l'on calculera. [0,5 pt]
- 4) Calculer le module et un argument de $\frac{c}{a}$, puis en déduire la nature du triangle OAC . [1 pt]

Exercice 4 — Nombres complexes — 3 points

★★★★★

- 1) Écrire $1 + i$ sous forme trigonométrique, puis calculer $(1 + i)^8$ à l'aide de la formule de Moivre. [0,5 pt]
- 2) Écrire le nombre complexe $z_1 = \frac{1 + i}{1 - i}$ sous forme algébrique. [0,5 pt]
- 3) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $w = 1 - i\sqrt{3}$. [0,5 pt]
- 4) En déduire la forme algébrique de w^3 . [0,5 pt]
- 5) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2i| = |z + 2|$. [0,5 pt]

6) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1 + i| = 2$. [0,5 pt]

Exercice 5 — Problème : étude de fonction — 7,5 points

★★★★★

Partie A. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 2 \ln x$.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. [0,5 pt]
- 2) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. [0,5 pt]
- 3) Dresser le tableau de variations de g . [0,5 pt]
- 4) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$ (on admet que $\ln 2 < 1$). [0,5 pt]

Partie B. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - (\ln x)^2$, et on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat. [0,25 pt]
- b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (on pourra écrire $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$), puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. [0,25 pt]
- c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$, puis interpréter graphiquement les résultats. [0,5 pt]
- d) Étudier la position relative de (C_f) et de (Δ) . [0,5 pt]
- 2) a) Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$. [0,5 pt]
- b) Dresser le tableau de variations de f . [0,5 pt]
- c) Montrer que (Δ) est la tangente à (C_f) au point A d'abscisse 1. [0,5 pt]
- 3) a) Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x^2}$, puis en déduire que (C_f) admet un unique point d'inflexion I , dont on précisera les coordonnées. [0,75 pt]
- b) Tracer (Δ) et (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra $e \approx 2,7$). [1 pt]
- 4) a) Montrer que f est une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer. [0,25 pt]
- b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans $]0; +\infty[$, et que $\frac{1}{e} < \beta < 1$. [0,5 pt]

Bonus [+0,5 pt]. Montrer que $\ln \beta = -\sqrt{\beta}$.