

Devoir surveillé n° 3 — Durée : 2 heures

Fonctions logarithmes — Nombres complexes

2^{ème} Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — barème

Exercice 1 : 6 points ; exercice 2 : 14 points ; total sur 20. Le barème de chaque question est indiqué entre crochets. Deux questions **bonus** (+0,5 pt chacune) ; la note est plafonnée à 20.

Exercice 1 — Nombres complexes — 6 points

★★★★

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. [1,5 pt]
2. On pose $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$. Écrire a et b sous forme trigonométrique. [1,5 pt]
3. On considère les points A , B et C d'affixes respectives a , b et $c = 2i$. Montrer que les points A , B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2. [1 pt]
4. Écrire le nombre $\frac{c-a}{b-a}$ sous forme algébrique, puis en déduire la nature du triangle ABC . [2 pts]
5. **Bonus.** Montrer que a^6 est un nombre réel et calculer sa valeur. [+0,5 pt]

Exercice 2 — Fonction logarithme népérien — 14 points

★★★★

Partie A. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g (les limites ne sont pas demandées). [2 pts]
2. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. [1 pt]

Partie B. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$, et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat. [1 pt]
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$. [2,5 pts]
5. Étudier la position relative de (C_f) et de (D) . [1,5 pt]
6. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. [1,5 pt]
7. Dresser le tableau de variations de f . [1 pt]
8. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point A d'abscisse 1. [1 pt]
9. Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $]0; +\infty[$. [1 pt]
10. Tracer (D) , (T) et (C_f) dans le même repère. [1,5 pt]

Bonus. Montrer que la fonction $H : x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$, puis en déduire une primitive de f sur $]0; +\infty[$. [+0,5 pt]