

Devoir surveillé n° 2 — Durée : 2 heures

Étude de fonctions — Suites — Primitives

2^{ème} Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — barème

Exercice 1 : 8 points ; exercice 2 : 9 points ; exercice 3 : 3 points ; total sur 20. Le barème de chaque question est indiqué entre crochets. Deux questions **bonus** (+0,5 pt chacune) ; la note est plafonnée à 20.

Exercice 1 — Étude de fonction — 8 points

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $D_f =]-\infty; 0] \cup]2; +\infty[$ par $f(x) = x - 2 - \sqrt{\frac{x}{x-2}}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. [0,5 pt]
2. a. Vérifier que, pour tout $x \in D_f$, $f(x) - (x - 3) = \frac{-2}{x-2} \times \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x}{x-2}}}$. [0,25 pt]
 - b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$. [0,75 pt]
 - c. Étudier la position relative de (C_f) et de (D) sur $] -\infty; 0]$ et sur $]2; +\infty[$. [1 pt]
3. a. Vérifier que, pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $-\frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2}}$ et $\frac{f(x)+2}{x} = 1 + \sqrt{\frac{1}{x(x-2)}}$. [0,5 pt]
 - b. Étudier la dérivabilité de f à gauche en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. [0,75 pt]
4. Montrer que, pour tout $x \in D_f \setminus \{0\}$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)^2 \sqrt{\frac{x}{x-2}}}$, puis dresser le tableau de variations de f . [1 pt]
5. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α , et que $\alpha \in]3; 4[$. [0,5 pt]
 - b. Vérifier que $(\alpha - 2)^2 = \frac{\alpha}{\alpha - 2}$. [0,25 pt]
6. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. [1,25 pt]
7. On considère la restriction g de f à l'intervalle $I =]2; +\infty[$.
 - a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. [0,25 pt]
 - b. Montrer que $(g^{-1})'(0) = \frac{(\alpha - 2)^3}{1 + (\alpha - 2)^3}$. [0,5 pt]
8. Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère. [0,5 pt]
9. **Bonus.** Montrer que $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 11\alpha - 8 = 0$. [+0,5 pt]

Exercice 2 — Suites numériques — 9 points

★★★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $u_n < 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. [1,5 pt]
2. a. Montrer que la suite (u_n) est croissante. [1,5 pt]
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. [1 pt]
3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, puis exprimer v_n en fonction de n . [2 pts]
 - b. Montrer que $u_n = 4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. [2 pts]
4. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 3,99$. [1 pt]
5. **Bonus.** Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ en fonction de n , puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$. [+0,5 pt]

Exercice 3 — *Primitives* — 3 points

Déterminer, dans chaque cas, une primitive F de f sur l'intervalle I indiqué. [**1 pt chacune**]

1. $f(x) = x^9, I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = x(x^2 + 1)^3, I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \frac{4x + 8}{\sqrt{x^2 + 4x + 1}}, I =]0; +\infty[$.