

Devoir surveillé n° 1 — Durée : 2 heures

Continuité — Dérivation

2^{ème} Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Remarque — barème

Exercice 1 : 5 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 10 points ; total sur 20. Le barème de chaque question est indiqué entre crochets. Deux questions **bonus** (+0,5 pt chacune) figurent à la fin de l'exercice 3 ; la note est plafonnée à 20.

Exercice 1 — Racines, limites et continuité — 5 points

★★★★★

1. Ranger dans l'ordre croissant les nombres $\sqrt[6]{10}$, $\sqrt[3]{3}$ et $\sqrt[4]{5}$. [1 pt]
2. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+1} - x \right)$. [2 pts]
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x - 2}$ si $x \neq 2$ et $f(2) = 2$.
Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 2)(x^2 - 2x + 1)$, puis étudier la continuité de f en 2. [1 pt]
4. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x^2 + 16}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - 5}{x - 3}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu. [1 pt]

Exercice 2 — Théorème des valeurs intermédiaires — 5 points

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$.

1. Étudier les variations de f (on donne $f(1) = -1$ et $f(2) = -2$). [1 pt]
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α , et que $\alpha \in]2; 3[$. [1 pt]
3. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(1) = (x - 1)^2(2x - 5)$, puis dresser le tableau de signe de $f(x)$ et celui de $f(x) - f(1)$ sur $\mathbb{R}$. [1 pt]
4. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,5 (on donne $f\left(\frac{5}{2}\right) = -1$). [1 pt]
5. Montrer que $2\left(\alpha - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} = \frac{6}{\alpha}$. [1 pt]

Exercice 3 — Fonction définie par morceaux et réciproque — 10 points

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 \text{ si } x < 3 \quad \text{et} \quad f(x) = 2 - \sqrt{x^2 - 9} \text{ si } x \geq 3.$$

1. Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. [0,5 pt]
2. Montrer que f est continue en 3. [1 pt]
3. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$ (on remarquera que $\mathbb{R} =]-\infty; 3] \cup [3; +\infty[$). [1 pt]
4. a. Vérifier que, pour tout $x > 3$, $\sqrt{x^2 - 9} = (x - 3) \times \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$. [0,25 pt]
b. Montrer que f n'est pas dérivable à droite en 3, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu. [1,25 pt]
5. a. Montrer que $f'(x) = 2(x - 2)$ pour tout $x \in]-\infty; 3[$ et $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 9}}$ pour tout $x \in [3; +\infty[$. [1,25 pt]
b. Étudier le signe de $f'(x)$ (cas $x < 2$, $2 < x < 3$ et $x > 3$), puis dresser le tableau de variations de f . [1,5 pt]
6. On considère la restriction g de f à l'intervalle $]3; +\infty[$.
a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. [1 pt]

- b. Calculer $g(5)$, puis montrer que g^{-1} est dérivable en -2 et calculer $(g^{-1})'(-2)$. [0,75 pt]
- c. Déterminer une équation de la tangente à $(C_{g^{-1}})$ au point d'abscisse -2 . [0,5 pt]
- d. Dresser le tableau de variations de g^{-1} . [0,5 pt]
- e. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$. [0,5 pt]

Bonus.

- 7. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x)$. [+0,5 pt]
- 8. Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = \frac{3}{2}$. [+0,5 pt]