

Devoir maison n° 3

Fonctions logarithmes — Nombres complexes

2^{ème} Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1 — Fonctions logarithmes (13 pts)

★★★★★

Soit f la fonction définie sur $D_f =]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln(x) + \frac{1}{2}(\ln(x))^2$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat. [1 pt]
- Vérifier que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln(x) - 1\right)\ln(x)$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. [1 pt]
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x} = 0$ (on pourra poser $x = t^2$). [0,5 pt]
 - Montrer que (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite $(\Delta) : y = x$ au voisinage de $+\infty$. [1 pt]
- Vérifier que, pour tout $x \in]0; 1[$, $(x - 1) + \ln(x) < 0$ et que, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $(x - 1) + \ln(x) \geq 0$. [1 pt]
- Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{(x - 1) + \ln(x)}{x}$. [1 pt]
 - Dresser le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$. [0,75 pt]
 - On pose $I = [1; e]$. Montrer que $f(I) \subset I$. [0,75 pt]
- Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{2 - \ln(x)}{x^2}$. [0,75 pt]
 - En déduire que (C_f) admet un point d'inflexion J dont on déterminera les coordonnées. [0,75 pt]
- Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln(x) - 1)^2$. [0,5 pt]
 - Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$. [0,5 pt]
 - En déduire la position relative de (C_f) et (Δ) sur $]0; +\infty[$. [0,5 pt]
- Construire la droite (Δ) et la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. [1 pt]
- On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq e$. [0,75 pt]
 - Étudier la monotonie de la suite (u_n) . [0,5 pt]
 - En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite. [0,75 pt]

Exercice 2 — Nombres complexes (7 pts)

★★★★★

- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$. [1 pt]
- On pose $a = 1 - i$ et $b = 2 + \sqrt{3} + i$.
 - Écrire a sous forme trigonométrique. [0,5 pt]
 - Vérifier que $\frac{b}{a} = \left(1 + \sqrt{3}\right) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$, puis écrire b sous forme trigonométrique. [1,25 pt]
 - En utilisant la formule de Moivre, montrer que b^6 est un nombre imaginaire pur. [0,75 pt]
- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives a , b et $c = -1 + i\sqrt{3}$.
 - Montrer que $\frac{c - a}{b - a} = i$. [0,75 pt]
 - En déduire $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}$ et une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, puis la nature du triangle ABC . [1 pt]
- Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2 - \sqrt{3} - i| = |z + 1 - i\sqrt{3}|$.
 - Déterminer l'ensemble (E) . [1 pt]
 - En déduire que le milieu K du segment $[BC]$ appartient à (E) . [0,75 pt]