

Devoir maison n° 2

Étude de fonctions — Suites — Primitives

2^{ème} Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1 — Étude de fonction

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x(\sqrt{x} - 3)^2$.

- Étudier la continuité de f sur $[0; +\infty[$.
- Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = (\sqrt{x} - 3)(2\sqrt{x} - 3)$.
 - Dresser le tableau de variations de f .
 - Dresser le tableau de signe de $f(x)$ sur $[0; +\infty[$.
 - Montrer que l'équation $f(x) = x - 3$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left] \frac{9}{4}; 9 \right[$.
- On considère la restriction g de f à l'intervalle $[9; +\infty[$.
 - Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 - Dresser le tableau de variations de g^{-1} .
 - Calculer $g(16)$, puis en déduire $(g^{-1})'(16)$.
- Montrer que, pour tout $x \in J$, $g^{-1}(x) = \left(\frac{3 + \sqrt{9 + 4\sqrt{x}}}{2} \right)^2$.
 - Déterminer, par deux méthodes, l'expression de $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x \in J \setminus \{0\}$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- Étudier la concavité de (C_f) et montrer que (C_f) admet un unique point d'inflexion I à déterminer.
- Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.
- Tracer (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x$ dans un même repère orthonormé (on donne $f(16) = 16$).
- Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.
- Résoudre graphiquement : $f(x) = x$; $f(x) \leq x$; $g^{-1}(x) = 16$.

Exercice 2 — Suites numériques

★★★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie I

- Calculer u_1 et u_2 .
- Montrer par récurrence que $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{u_n}$.
- Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

Partie II

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{2}(u_n - 2)$.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Partie III. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$.

- Montrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
- Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
- Retrouver la limite de la suite (u_n) .

Partie IV. On considère la fonction h définie sur $I = [2; +\infty[$ par $h(x) = \frac{3x-2}{x}$.

1. Étudier les variations de h sur I .
2. Vérifier que $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer par récurrence que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Vérifier que $h(I) \subset I$.
5. Retrouver la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3 — *Primitives*



Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué, dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = 6x^2 - 4x + 1, I = \mathbb{R}$	2. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}, I =]-2; +\infty[$
3. $f(x) = \frac{4}{x^2}, I =]0; +\infty[$	4. $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}, I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = \sin x \cos^2 x, I = \mathbb{R}$	6. $f(x) = -\tan^2 x, I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
7. $f(x) = \frac{2}{(1-2x)^2}, I =]\frac{1}{2}; +\infty[$	8. $f(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x}}, I =]0; +\infty[$
9. $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}, I =]0; +\infty[$	10. $f(x) = x\sqrt{x^2+9}, I = \mathbb{R}$
11. $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+4}}, I = \mathbb{R}$	12. $f(x) = \cos(3x) + \sin\left(\frac{x}{2}\right), I = \mathbb{R}$
13. $f(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2}, I =]0; +\infty[$	14. $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, I = \mathbb{R}$
15. $f(x) = \frac{3x^2+2x}{(x^3+x^2+5)^2}, I =]0; +\infty[$	16. $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}, I =]1; +\infty[$