

Devoir maison n° 1

Continuité — Dérivation

2^{ème} Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1 — Racines n -ièmes

★★★★★

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\sqrt[3]{x} + 1)^3 - 27 = 0$, puis l'inéquation $\sqrt[3]{x^2 + 23} - 1 < x$.
2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{x-3} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1} - 2x \right) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1} - x \right).$$

3. Comparer les nombres $\sqrt[4]{5}$ et $\sqrt[3]{3}$.
4. Ranger dans l'ordre croissant les nombres : $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[6]{6}$; $\sqrt[4]{3}$.

Exercice 2 — Étude d'une fonction et de sa réciproque

★★★★★

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2 + \sqrt{x^2 + 2x}$.

1. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
2. a. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
b. Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
c. Dresser le tableau de variations de f .
3. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $[-2; +\infty[$.
4. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$, et que $\alpha \in]0; 1[$.
b. Vérifier que $\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha} = 2 - \alpha^2$.
5. Donner le sens de variation de f^{-1} .
6. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $] -2; +\infty[$.

Exercice 3 — Fonction auxiliaire et nombre de solutions

★★★★★

I. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x + 4$.

1. a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
b. Déterminer l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction f .
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $-2 < \alpha < -1$.
b. Vérifier que $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{19}{8}$, puis en déduire un encadrement de α d'amplitude $\frac{1}{2}$.
c. Vérifier que $\alpha = -\sqrt[3]{2\alpha + 4}$.
3. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

II. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 4x$.

1. a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f(x)$.
b. Dresser le tableau de variations de la fonction g .
2. a. Montrer que $g(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha + 6)}{2}$.
b. Déterminer le signe de $g(\alpha)$.
c. En déduire le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$.