

Cours — Chapitre 12

Probabilités

2BAC PC SVT · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Dénombrement — II. Probabilités sur un ensemble fini — III. Variables aléatoires et loi binomiale.

I. Dénombrement

1. Cardinal et principe multiplicatif

Définition 1

On considère un ensemble fini E . Le **cardinal** de E , noté $\text{card}(E)$, est le nombre de ses éléments.

Propriété 1 : Principe multiplicatif

On considère une expérience qui se déroule en p étapes successives. Si la première étape présente n_1 issues, la deuxième n_2 issues, $\dots$, la p -ième n_p issues, alors l'expérience présente $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$ issues.

Exemple 1

Un restaurant propose 2 entrées, 5 plats et 3 desserts. Le nombre de menus différents (entrée, plat, dessert) est $2 \times 5 \times 3 = 30$.

2. Arrangements et permutations

Définition 2

On considère un ensemble E à n éléments et un entier p tel que $1 \leq p \leq n$.
— Un **arrangement** de p éléments de E est une suite ordonnée de p éléments **distincts** de E .
— Une **permutation** de E est un arrangement des n éléments de E .

Propriété 2

— Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est $A_n^p = n(n-1) \cdots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$.
— Le nombre de permutations de n éléments est $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$, avec la convention $0! = 1$.
— Le nombre de suites de p éléments de E , distincts ou non, est n^p .

Exemple 2

$A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$; $5! = 120$; le nombre de codes de 4 chiffres formés avec les chiffres 0, 1 et 2 (répétitions autorisées) est $3^4 = 81$.

3. Combinaisons

Définition 3

On considère un ensemble E à n éléments et un entier p tel que $0 \leq p \leq n$. Une **combinaison** de p éléments de E est une partie de E à p éléments (l'ordre n'intervient pas).

Propriété 3

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, et l'on a :
$$C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^p = C_n^{n-p}, \quad C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}.$$

Exemple 3

$$C_6^2 = \frac{6 \times 5}{2} = 15; \quad C_9^3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84.$$

Remarque

Pour un tirage de p objets parmi n :

- **simultané** : un résultat est une combinaison, il y a C_n^p résultats ;
- **successif sans remise** : un résultat est un arrangement, il y a A_n^p résultats ;
- **successif avec remise** : un résultat est une suite quelconque, il y a n^p résultats.

Application 1

Une urne contient 4 boules blanches et 5 boules noires. On tire simultanément 3 boules. Déterminer le nombre de tirages possibles, puis le nombre de tirages contenant exactement 2 boules blanches.

► [Afficher / Masquer la solution](#)

II. Probabilités sur un ensemble fini

1. Expérience aléatoire et probabilité

Définition 4

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît les résultats possibles sans pouvoir prévoir lequel se réalisera. L'ensemble Ω des résultats est l'**univers**; une partie de Ω est un **événement**.
- On considère deux événements A et B : $A \cap B$ est réalisé si A et B le sont ; $A \cup B$ si l'un au moins l'est ; l'événement **contraire** $\bar{A}$ est réalisé si A ne l'est pas ; A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

Propriété 4

On considère une probabilité p sur un univers fini Ω et deux événements A et B .

- $p(\emptyset) = 0$, $p(\Omega) = 1$ et $0 \leq p(A) \leq 1$;
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$; $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$;
- **Équiprobabilité** : si tous les résultats ont la même probabilité, $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

Exemple 4

On tire au hasard une carte d'un jeu de 52 cartes (dont 4 as et 13 trèfles). Pour A : « as » et B : « trèfle », $p(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.

2. Probabilité conditionnelle

Définition 5

On considère deux événements A et B avec $p(A) \neq 0$. La **probabilité de B sachant A** est

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}, \quad \text{d'où} \quad p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B).$$

Remarque

La notation $p_A(B)$ n'est définie que si $p(A) \neq 0$; en particulier on exclut $A = \emptyset$ (et tout événement de probabilité nulle). Autrement dit, on travaille avec des événements A tels que $A \notin \{\emptyset\}$ au sens $p(A) > 0$.

3. Arbre pondéré et formule des probabilités totales

Propriété 5 : Probabilités totales

On considère des événements $A_1, \dots, A_n$ de probabilités non nulles, deux à deux incompatibles et dont la réunion est Ω (partition de Ω). Pour tout événement B :

$$p(B) = p(A_1)p_{A_1}(B) + p(A_2)p_{A_2}(B) + \dots + p(A_n)p_{A_n}(B).$$

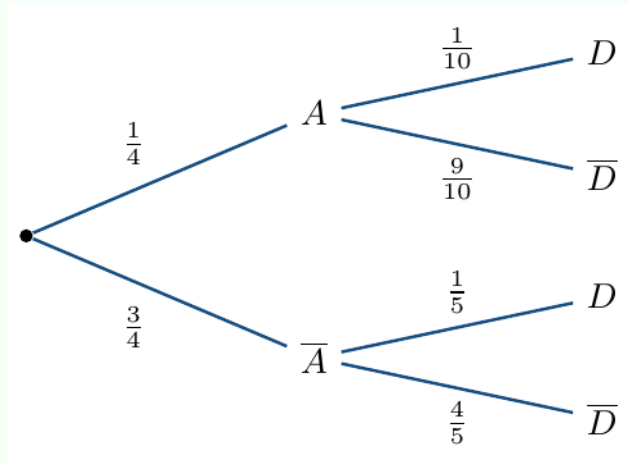
En particulier, $p(B) = p(A)p_A(B) + p(\bar{A})p_{\bar{A}}(B)$.

Remarque

Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités issues d'un même nœud vaut 1 ; la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches ; la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y mènent.

Application 2

Un atelier reçoit des pièces de deux fournisseurs : $\frac{1}{4}$ viennent du fournisseur A et le reste du fournisseur $\bar{A}$. $\frac{1}{10}$ des pièces de A et $\frac{1}{5}$ des pièces de l'autre sont défectueuses. On choisit une pièce au hasard ; D : « la pièce est défectueuse ». Calculer $p(D)$, puis $p_D(A)$.



► Afficher / Masquer la solution

4. Indépendance**Définition 6**

Deux événements A et B sont **indépendants** si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ (si $p(A) \neq 0$, cela équivaut à $p_A(B) = p(B)$).

Exemple 5

On lance une pièce équilibrée deux fois ; A : « pile au 1er lancer », B : « face au 2e lancer ». $p(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$: A et B sont indépendants.

5. Épreuves répétées**Propriété 6**

On considère une épreuve et un événement A de probabilité p . Si l'on répète n fois cette épreuve de façon indépendante, la probabilité que A soit réalisé exactement k fois ($0 \leq k \leq n$) est

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Exemple 6

On lance 5 fois un dé équilibré. La probabilité d'obtenir exactement deux fois le 6 est $C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10 \times \frac{125}{7776} = \frac{1250}{7776} = \frac{625}{3888}$.

III. Variables aléatoires et loi binomiale**1. Variable aléatoire et loi de probabilité****Définition 7**

- Une **variable aléatoire** X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$; on note $X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_n\}$ l'ensemble de ses valeurs.
- La **loi de probabilité** de X associe à chaque valeur x_i la probabilité $p_i = p(X = x_i)$; on a $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

2. Espérance, variance, écart-type**Définition 8**

On considère une variable aléatoire X de loi $(x_i; p_i)_{1 \leq i \leq n}$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad V(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - (E(X))^2, \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Application 3

Une urne contient 4 boules rouges et 3 boules vertes. On tire simultanément 2 boules ; X est le nombre de boules rouges tirées. Déterminer la loi de X , puis $E(X)$ et $V(X)$.

► [Afficher / Masquer la solution](#)

3. Loi binomiale**Définition 9**

On répète n fois, de façon indépendante, une épreuve à deux issues : le succès S , de probabilité p , et l'échec. La variable aléatoire X égale au nombre de succès suit la **loi binomiale** de paramètres n et p , notée $\mathcal{B}(n; p)$.

Propriété 7

Si X suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$, alors pour tout $k \in \{0; 1; \dots; n\}$:

$$p(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad E(X) = np, \quad V(X) = np(1 - p).$$

Application 4

Un QCM comporte 5 questions ; pour chacune, 5 réponses sont proposées dont une seule est juste. Un élève répond au hasard ; X est le nombre de bonnes réponses. Calculer $p(X = 2)$, $E(X)$ et $V(X)$.

► Afficher / Masquer la solution

Résumé

À retenir — l’essentiel du chapitre

Notion	À retenir
Arrangements / combinaisons	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}, C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
Types de tirage	Simultané : C_n^p ; successif sans remise : A_n^p ; avec remise : n^p
Probabilité	$p(\overline{A}) = 1 - p(A) ; p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
Conditionnelle	$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$; probabilités totales
Indépendance	$p(A \cap B) = p(A) p(B)$
Variable aléatoire	$E(X) = \sum x_i p_i, V(X) = E(X^2) - E(X)^2, \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
Loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$	$p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, E = np, V = np(1-p)$