

Cours — Chapitre 11

Géométrie de l'espace

2BAC PC SVT · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Repère et produit scalaire dans l'espace — II. Plans dans l'espace — III. La sphère — IV. Le produit vectoriel.

Dans tout le chapitre, l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

I. Repère et produit scalaire dans l'espace

1. Repère orthonormé direct

Définition 1

Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormé** si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et de norme 1. On considère les points I, J, K tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}, \overrightarrow{OJ} = \vec{j}, \overrightarrow{OK} = \vec{k}$; le repère est **direct** si un observateur placé debout sur (OK) , les pieds en O et regardant vers I , a le point J à sa gauche (règle « du bonhomme d'Ampère »).

2. Produit scalaire

Définition 2

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace et trois points A, B, C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Le **produit scalaire** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans un plan contenant A, B et C :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC}) \quad (\text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}),$$

et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs est nul.

Propriété 1 : Expression analytique

On considère les vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ et les points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$;
- $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemple 1

Pour $\vec{u}(1; -2; 2)$ et $\vec{v}(4; 1; -1)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 - 2 - 2 = 0$, donc $\vec{u} \perp \vec{v}$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$.

3. Représentation paramétrique d'une droite

Propriété 2

On considère un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un vecteur non nul $\vec{u}(a; b; c)$. La droite (D) passant par A et dirigée par $\vec{u}$ admet la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

II. Plans dans l'espace

1. Vecteur normal et équation cartésienne

Définition 3

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal** à un plan (P) s'il est orthogonal à tous les vecteurs de (P) (il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (P)).

Propriété 3

On considère un point A et un vecteur non nul $\vec{n}(a; b; c)$.

- Le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$; il admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
- Réciproquement, si $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Exemple 2

Le plan passant par $A(1; 0; -2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2; -1; 3)$ a pour équation $2(x-1) - (y-0) + 3(z+2) = 0$, soit $2x - y + 3z + 4 = 0$.

2. Positions relatives

Propriété 4

On considère deux plans (P) et (Q) de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$, et une droite (D) dirigée par $\vec{u}$.

- $(P) \parallel (Q) \iff \vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires; $(P) \perp (Q) \iff \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$.
- Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, (P) et (Q) sont sécants suivant une droite.
- $(D) \perp (P) \iff \vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires; $(D) \parallel (P) \iff \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

Application 1

On considère le plan $(P) : x + 2y - 2z + 3 = 0$ et la droite (D) de représentation paramétrique $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = -1 - 2t$ ($t \in \mathbb{R}$). Montrer que $(D) \perp (P)$ et déterminer le point d'intersection de (D) et de (P) .

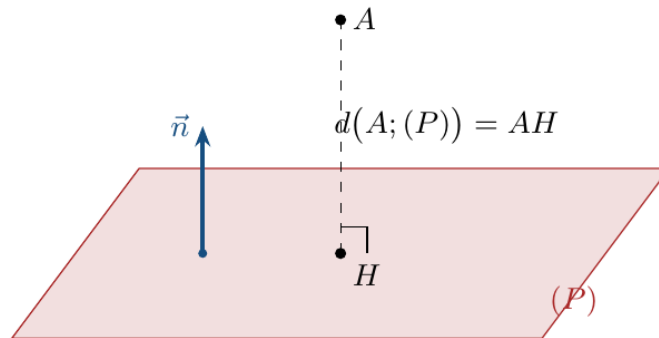
► Afficher / Masquer la solution

3. Distance d'un point à un plan

Propriété 5

On considère le plan $(P) : ax + by + cz + d = 0$ et un point $A(x_A; y_A; z_A)$. La distance de A à (P) , c'est-à-dire AH où H est le projeté orthogonal de A sur (P) , est

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$



Exemple 3

$$d(O; (P)) \text{ avec } (P) : x + 2y - 2z + 3 = 0 : \frac{|3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 1.$$

III. La sphère

1. Définition et équation

Définition 4

On considère un point Ω et un réel $R > 0$. La **sphère** (S) de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\Omega M = R$.

Propriété 6

- La sphère de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon R a pour équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.
- La sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

2. L'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

Propriété 7

On considère des réels a, b, c, d , l'ensemble (Σ) des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$, le point $\Omega \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2} \right)$ et le réel $k = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d$.

- Si $k > 0$, (Σ) est la sphère de centre Ω et de rayon $\sqrt{k}$;

— si $k = 0$, $(\Sigma) = \{\Omega\}$; si $k < 0$, $(\Sigma) = \emptyset$.

Exemple 4

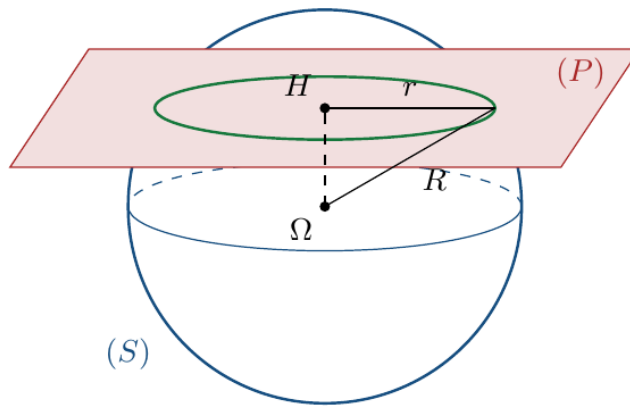
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0 \iff (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1 + 4 + 9 - 5 = 9$: c'est la sphère de centre $\Omega(1; -2; 3)$ et de rayon 3.

3. Position relative d'un plan et d'une sphère

Propriété 8

On considère la sphère (S) de centre Ω et de rayon R , un plan (P) , le projeté orthogonal H de Ω sur (P) et $d = d(\Omega; (P)) = \Omega H$.

- Si $d > R$: $(P) \cap (S) = \emptyset$.
- Si $d = R$: (P) est **tangent** à (S) en H ; $\overrightarrow{\Omega H}$ est normal à (P) .
- Si $d < R$: (P) coupe (S) suivant le **cercle** de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.



Application 2

On considère la sphère (S) de l'exemple 4 et le plan (P) : $2x - y + 2z - 1 = 0$. Étudier la position relative de (P) et de (S) .

► Afficher / Masquer la solution

4. Plan tangent en un point de la sphère

Propriété 9

On considère un point A de la sphère (S) de centre Ω . Le plan tangent à (S) en A est le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$.

5. Position relative d'une droite et d'une sphère

Propriété 10

On considère la sphère (S) de centre Ω et de rayon R , et une droite (D) . En notant $d = d(\Omega; (D))$: si $d > R$, $(D) \cap (S) = \emptyset$; si $d = R$, (D) est tangente à (S) ; si $d < R$, (D) coupe (S) en deux points. En pratique, on remplace x, y, z par la représentation paramétrique de (D) dans l'équation de (S) et on résout l'équation du second degré en t obtenue.

IV. Le produit vectoriel

1. Définition

Définition 5

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace orienté.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Sinon, le **produit vectoriel** $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur tel que : $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$; la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe; $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin \theta$, où $\theta \in]0; \pi[$ est une mesure de l'angle géométrique formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. Propriétés

Propriété 11

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel λ :

- $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$; $(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$; $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$;
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

3. Expression analytique

Propriété 12

Dans le repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pour $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \vec{k} = (bc' - cb') \vec{i} + (ca' - ac') \vec{j} + (ab' - ba') \vec{k}.$$

Exemple 5

Pour $\vec{u}(1; 2; -1)$ et $\vec{v}(3; 0; 2)$: $\vec{u} \wedge \vec{v} = (4-0)\vec{i} + (-3-2)\vec{j} + (0-6)\vec{k} = 4\vec{i} - 5\vec{j} - 6\vec{k}$. On vérifie : $(4; -5; -6) \cdot (1; 2; -1) = 4 - 10 + 6 = 0$ et $(4; -5; -6) \cdot (3; 0; 2) = 12 - 12 = 0$.

4. Applications

Propriété 13

On considère trois points A, B, C de l'espace.

- A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
- Si A, B, C ne sont pas alignés, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un **vecteur normal** au plan (ABC) .
- **Aire du triangle** : $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.
- **Distance d'un point à une droite** : si (D) passe par A et est dirigée par $\vec{u}$, alors pour tout point M ,

$$d(M; (D)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$
- **Intersection de deux plans** : si (P) et (Q) ont des vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ non colinéaires, leur droite d'intersection est dirigée par $\vec{n} \wedge \vec{n}'$.

Application 3

On considère les points $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$ et $C(0; 2; 1)$.

- 1) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que A, B, C ne sont pas alignés.
- 2) En déduire une équation du plan (ABC) et l'aire du triangle ABC .
- 3) Calculer la distance du point C à la droite (AB) .

► Afficher / Masquer la solution

À retenir — l'essentiel du chapitre

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$; plan : $ax + by + cz + d = 0$, $\vec{n}(a; b; c)$; $d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
- Sphère : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$; plan/sphère selon d et R , cercle de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$.
- $\vec{u} \wedge \vec{v}$: normal à (ABC) , aire $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$, $d(M; (D)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.