

Cours — Chapitre 10

Calcul intégral

2BAC PC SVT · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Intégrale sur un segment — II. Ordre et valeur moyenne — III. Techniques de calcul (primitives, intégration par parties, fractions rationnelles, linéarisation) — IV. Aires et volumes — Résumé.

I. Intégrale d’une fonction continue sur un segment

1. Définition

Définition 1 — intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , F une primitive de f sur I , et a, b deux éléments de I . Le réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie : on l’appelle **intégrale de f de a à b** et on note

$$\int_a^b f(x) \, dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque

— La variable x est « muette » : $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt$.

— $\int_a^a f(x) \, dx = 0$ et $\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx$.

— La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$ est **la primitive de f sur I qui s’annule en a** .

2. Exemples

Exemple 1

— $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) \, dx = \left[x^3 - x^2 + x \right]_0^2 = 8 - 4 + 2 = 6$.

— $\int_1^e \frac{dx}{x} = \left[\ln x \right]_1^e = 1$; $\int_0^{\ln 2} e^{2x} \, dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2} (4 - 1) = \frac{3}{2}$.

— $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Application 1

Calculer $I = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx$, $J = \int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ et $K = \int_0^1 x e^{-x^2} dx$.

► [Afficher](#) / [Masquer la solution](#)

II. Propriétés : ordre et valeur moyenne

1. Relation de Chasles et linéarité

Propriété 1

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , a, b, c des éléments de I et α un réel.

- **Chasles** : $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.
- **Linéarité** : $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ et $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$.

Application 2 — valeur absolue

Calculer $\int_0^3 |x-1| dx$.

► [Afficher](#) / [Masquer la solution](#)

2. Positivité et comparaison

Propriété 2

Soit f et g continues sur $[a; b]$ avec $a \leq b$.

- Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
- Si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.
- Si $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a; b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

Attention

Ces propriétés exigent $a \leq b$: si $a > b$, les inégalités entre intégrales sont inversées.

Application 3 — encadrement

Montrer que $\frac{1}{3} \leq \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx + \frac{1}{6} \leq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\frac{1}{6} \leq \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{3}$.

► Afficher / Masquer la solution

3. Valeur moyenne**Définition 2**

Soit f continue sur $[a; b]$ avec $a < b$. Le réel $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est la **valeur moyenne** de f sur $[a; b]$. Il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = \mu$.

Exemple 2

La valeur moyenne de $x \mapsto \sin x$ sur $[0; \pi]$ est $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{1}{\pi} [-\cos x]_0^\pi = \frac{2}{\pi}$.

III. Techniques de calcul d'intégrales**1. Intégration par parties****Théorème 1**

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , de dérivées u' et v' continues sur I , et $a, b \in I$. Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Remarque — démonstration

$(uv)' = u'v + uv'$ est continue, donc $\int_a^b (u'v + uv') = [uv]_a^b$, puis on utilise la linéarité.

Méthode — choisir u et v'

On choisit pour u la fonction qui se « simplifie » en dérivant (un polynôme, $\ln x$) et pour v' une fonction dont on connaît une primitive (e^x , $\cos x$, $\sin x$, x^n).

Application 4

Calculer $I = \int_0^1 x e^x dx$ et $J = \int_1^e x \ln x dx$.

► Afficher / Masquer la solution

Application 5 — deux intégrations successives

Calculer $K = \int_0^\pi x^2 \cos x dx$.

► Afficher / Masquer la solution

2. Décomposition de fractions rationnelles**Méthode — fractions rationnelles**

Pour calculer $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ lorsque P et Q sont des polynômes, on décompose la fraction en somme de fractions plus simples (de la forme $\frac{A}{(x - \alpha)^k}$ ou $\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}$), puis on intègre terme à terme à l'aide des primitives usuelles.

Application 6 — fraction rationnelle

Soit f définie par $f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)^2}$. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \neq -1$, $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$, puis calculer $\int_0^1 f(x) dx$.

► Afficher / Masquer la solution

3. Linéarisation trigonométrique**Méthode — linéarisation**

Pour intégrer une puissance de sin ou cos, on la **linéarise** : on l'écrit comme combinaison linéaire de sinus ou cosinus d'angles multiples, à l'aide des formules d'addition (ou de Moivre). On intègre ensuite terme à terme.

Application 7 — linéarisation

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos(3x))$.
2. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx$.

► Afficher / Masquer la solution

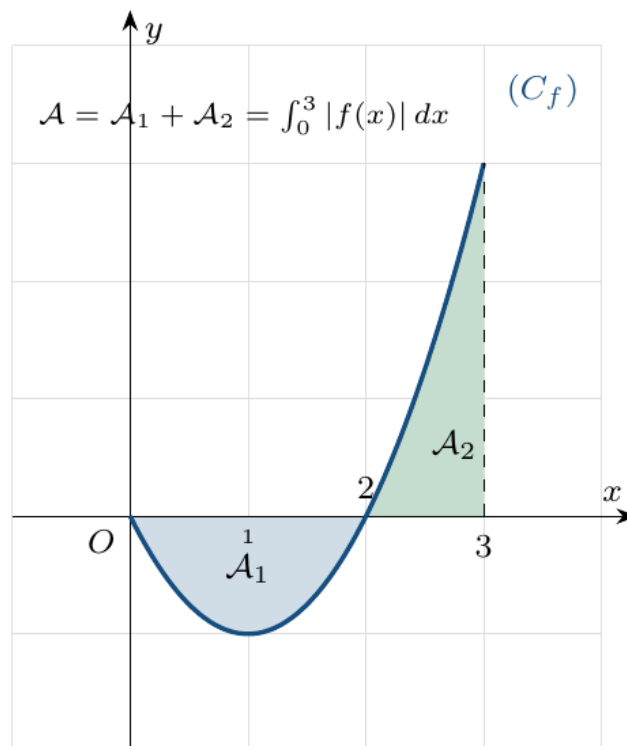
IV. Calcul d'aires et de volumes**1. Aires****Propriété 3**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; l'**unité d'aire** (u.a.) est l'aire du rectangle construit sur $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$. Soit f et g continues sur $[a; b]$ ($a < b$).

— L'aire du domaine limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| \, dx \text{ u.a.}$$

— L'aire du domaine limité par (C_f) , (C_g) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$ u.a.



Application 8 — aire

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité 2 cm. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

► Afficher / Masquer la solution

2. Volumes

Propriété 4 — solide de révolution

L'espace est rapporté à un repère orthonormé ; l'**unité de volume** (u.v.) est le volume du cube construit sur les vecteurs unitaires. Soit f continue sur $[a; b]$ ($a < b$). Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe (C_f) (pour $x \in [a; b]$) autour de l'axe des abscisses est

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx \text{ u.v.}$$

Application 9 — volume

Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe de $f : x \mapsto \sqrt{x} e^x$ sur $[0; 1]$.

► Afficher / Masquer la solution

Résumé

À retenir

Notion	À retenir
Définition	$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$, F primitive de f
Propriétés	Chasles ; linéarité ; si $a \leq b : f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$ et $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$
Valeur moyenne	$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$
Par parties	$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$
Fractions	décomposer $\frac{P}{Q}$ en fractions simples, puis intégrer
Linéarisation	écrire $\sin^n$, $\cos^n$ comme somme de sin/cos d'angles multiples
Aire	$\int_a^b f(x) \, dx$ u.a. ; entre deux courbes $\int_a^b f - g $ u.a.
Volume	$\pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$ u.v.