

Cours — Chapitre 07

Nombres complexes

2ème Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT)

Lycée Qualifiant Ibn Hazm

Prof. El Koudri Hamza

2026–2027

Plan du chapitre. *Partie 1* : I. Forme algébrique — II. Module, argument, formes trigonométrique et exponentielle — III. Nombres complexes et géométrie. *Partie 2* : IV. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$ — V. Transformations du plan — VI. Formules d’Euler et linéarisation — VII. Ensembles de points — Résumé.

Dans tout le chapitre, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

I. Forme algébrique d’un nombre complexe

1. Définition

Définition 1 — l’ensemble $\mathbb{C}$

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, contenant $\mathbb{R}$, muni d’une addition et d’une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et ont les mêmes règles de calcul, et contenant un nombre i tel que $i^2 = -1$.

Tout nombre complexe z s’écrit de façon **unique** $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$: c’est la **forme algébrique** de z . Le réel a est la **partie réelle** de z , notée $\Re(z)$; le réel b est la **partie imaginaire**, notée $\Im(z)$.

Propriété 1

— z est réel $\iff \Im(z) = 0$; z est **imaginaire pur** $\iff \Re(z) = 0$ (on note $i\mathbb{R}$ l’ensemble des imaginaires purs).

— Pour tous réels a, b, a', b' : $a + ib = a' + ib' \iff a = a'$ et $b = b'$. En particulier $a + ib = 0 \iff a = b = 0$.

2. Exemples

Exemple 1

— Calculer $(2 + 3i) + (1 - 5i)$ et $(2 + 3i)(1 - 5i)$.

— Calculer i^2, i^3, i^4 , en déduire i^{4k+r} pour $k \in \mathbb{N}$, puis calculer i^{2026} .

Afficher / Masquer la solution

3. Représentation géométrique

Définition 2 — affixe

À tout nombre complexe $z = a + ib$ (a, b réels) on associe le point $M(a; b)$ et le vecteur $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. On dit que z est l’**affixe** de M (et de $\vec{w}$), et que M est l’**image** de z . On note $M(z)$.

Propriété 2

Pour des points $A(z_A), B(z_B)$:

— le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$;

— le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$;

— $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff z_B - z_A = z_C - z_D$ (caractérisation d’un parallélogramme $ABCD$).

4. Conjugué et inverse

Définition 3 — conjugué

Le **conjugué** de $z = a + ib$ (a, b réels) est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$. Les points $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Propriété 3

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$, $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$, $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ et, si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$;
- $z + \bar{z} = 2\Re(z)$, $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$, $z\bar{z} = a^2 + b^2$;
- $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$; $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$.

Méthode — forme algébrique d'un quotient

On multiplie le numérateur et le dénominateur par le **conjugué du dénominateur** : $\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

Application 1

Écrire sous forme algébrique $z_1 = \frac{3 - i}{1 + 2i}$ et $z_2 = (1 + i)^4$.

► Afficher / Masquer la solution

II. Module, argument, formes trigonométrique et exponentielle

1. Module

Définition 4 — module

Le **module** de $z = a + ib$ (a, b réels) est le réel positif $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Si M est l'image de z , alors $|z| = OM$; et pour $A(z_A), B(z_B) : AB = |z_B - z_A|$.

Propriété 4

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$: $|z| = 0 \iff z = 0$; $|\bar{z}| = |-z| = |z|$; $|zz'| = |z||z'|$; $|z^n| = |z|^n$; si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$; et l'**inégalité triangulaire** $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Exemple 2

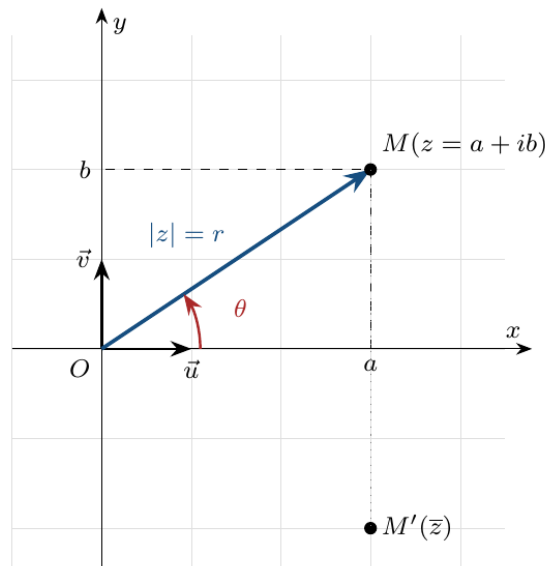
Calculer $|3 - 4i|$, $\left| \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} \right|$ et $|(1-i)^{10}|$.

► Afficher / Masquer la solution

2. Argument

Définition 5 — argument

Soit z un nombre complexe **non nul** d'image M . On appelle **argument** de z toute mesure θ de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. On note $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$.


Propriété 5

Pour z, z' non nuls et $n \in \mathbb{N}$:

Règle	Formule
produit, puissance	$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$, $\arg(z^n) \equiv n \arg z [2\pi]$
quotient	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' [2\pi]$, $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z [2\pi]$
conjugué, opposé	$\arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi]$, $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z [2\pi]$
réels, imaginaires	$z \in \mathbb{R}_+^* \iff \arg z \equiv 0$; $z \in \mathbb{R}^* \iff \arg z \equiv 0 [\pi]$; $z \in i\mathbb{R}^* \iff \arg z \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

3. Forme trigonométrique

Propriété 6

Tout nombre complexe non nul z , de module r et d'argument θ , s'écrit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$: c'est une **forme trigonométrique** de z . Réciproquement, si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg z \equiv \theta [2\pi]$.

Passage de la forme algébrique $z = a + ib$ à la forme trigonométrique : $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$.

Attention

L'écriture $-2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ n'est **pas** une forme trigonométrique (le facteur doit être strictement positif) ; on écrit $-2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$.

Application 2

Donner une forme trigonométrique de $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et de $z_2 = -3 + 3i$, puis de $z_1 z_2$.

► [Afficher](#) / [Masquer la solution](#)

4. Notation exponentielle et formule de Moivre**Définition 6**

Pour tout réel θ , on note $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Tout complexe non nul de module r et d'argument θ s'écrit $z = r e^{i\theta}$: c'est sa **forme exponentielle**.

Propriété 7

Pour tous réels θ, θ' et tout $n \in \mathbb{Z}$: $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $\left(e^{i\theta} \right)^n = e^{in\theta}$.

Formule de Moivre : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Valeurs à connaître : $e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

Application 3

On pose $z = 1 + i$. Calculer z^8 et montrer que $(1 + i)^{2026}$ est imaginaire pur.

► Afficher / Masquer la solution

III. Nombres complexes et géométrie

1. Distances et angles

Propriété 8

Pour des points distincts $A(a), B(b), C(c), D(d)$:

— $AB = |b - a|$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(b - a) [2\pi]$;

— $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) [2\pi]$; en particulier $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) [2\pi]$.

2. Configurations remarquables

À retenir — caractérisations (A, B, C distincts)

Situation	Condition
A, B, C alignés	$\frac{c - a}{b - a} \in \mathbb{R}$
$(AB) \perp (AC)$	$\frac{c - a}{b - a} \in i\mathbb{R}$
ABC isocèle en A	$\left \frac{c - a}{b - a}\right = 1$
ABC rectangle isocèle en A	$\frac{c - a}{b - a} = i$ ou $-i$
ABC équilatéral	$\frac{c - a}{b - a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $e^{-i\frac{\pi}{3}}$
A, B, C, D cocycliques ou alignés	$\frac{c - a}{b - a} \times \frac{b - d}{c - d} \in \mathbb{R}$

Application 4

On considère les points $A(1 + i)$, $B(3 + 2i)$ et $C(3i)$. Déterminer la nature du triangle ABC .

► Afficher / Masquer la solution

IV. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$ **Théorème 1**

On considère l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$: deux solutions réelles $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
 - Si $\Delta = 0$: une solution réelle double $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
 - Si $\Delta < 0$: deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \bar{z}_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
- Dans tous les cas, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$, $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Application 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$, puis écrire les solutions sous forme trigonométrique lorsque c'est simple.

► Afficher / Masquer la solution

V. Transformations du plan**Propriété 9 — écritures complexes**

Soit $M(z)$ un point et $M'(z')$ son image.

Transformation	Écriture complexe
translation de vecteur $\vec{w}(b)$	$z' = z + b$
homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$	$z' - \omega = k(z - \omega)$
rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

Réciproquement, la transformation d'écriture $z' = az + b$ est : une translation si $a = 1$; une homothétie de rapport a si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$; une rotation d'angle $\arg a$ si $|a| = 1$ et $a \neq 1$. Dans les deux derniers cas, le centre est l'**unique point invariant**, d'affixe $\omega = \frac{b}{1 - a}$.

Application 6

1. Déterminer l'écriture complexe de la rotation R de centre $\Omega(1 + i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, puis l'image de $A(3 + i)$.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f d'écriture $z' = -2z + 3i$.

► Afficher / Masquer la solution

VI. Formules d'Euler et linéarisation

Propriété 10 — formules d'Euler

Pour tout réel θ et tout entier n : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$, et $e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2 \cos(n\theta)$, $e^{in\theta} - e^{-in\theta} = 2i \sin(n\theta)$.

Méthode — linéariser

Pour écrire une puissance ou un produit de cos et sin comme combinaison de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$: on remplace chaque facteur par sa formule d'Euler, on développe (binôme), puis on regroupe les termes conjugués e^{ikx} et e^{-ikx} .

Application 7

Linéariser $\cos^3 x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

VII. Ensembles de points

À retenir — ensembles classiques ($A(a)$, $B(b)$ distincts, $r > 0$)

Condition sur $M(z)$	Ensemble
$ z - a = r$	cercle de centre A et de rayon r
$ z - a = z - b $	médiatrice de $[AB]$
$\frac{z - a}{z - b} \in \mathbb{R}$	droite (AB) privée de B
$\frac{z - a}{z - b} \in i\mathbb{R}$	cercle de diamètre $[AB]$ privé de B
$\arg(z - a) \equiv \theta \ [2\pi]$	demi-droite d'origine A (privée de A) dirigée par $e^{i\theta}$

Application 8

Déterminer l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ tels que $|iz + 1 - 2i| = 3$, puis l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ tels que $|z - 1| = |z + i|$.

► Afficher / Masquer la solution

Résumé

À retenir

Notion	À retenir
Forme algébrique	$z = a + ib, \bar{z} = a - ib, z\bar{z} = a^2 + b^2$
Module, argument	$ z = \sqrt{a^2 + b^2}; zz' = z z' ; \arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'$
Formes	$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$; Moivre $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
Géométrie	$AB = b - a ; \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg \frac{c-a}{b-a}$
Second degré	$\Delta < 0 : z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
Transformations	$z' = z + b; z' - \omega = k(z - \omega); z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$
Euler	$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$