

Cours — Chapitre 06

Fonctions logarithmes

2ème Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT)

·

Lycée Qualifiant Ibn Hazm

·

Prof. El Koudri Hamza

·

2026–2027

Plan du chapitre. I. La fonction logarithme népérien — II. Propriétés algébriques — III. Équations et inéquations — IV. Limites et courbe — V. Dérivée de $\ln u$ et primitives de $\frac{u'}{u}$ — VI. Logarithme de base a — Résumé.

I. La fonction logarithme népérien

1. Définition

Définition 1 — logarithme népérien

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$: elle y admet des primitives. On appelle **fonction logarithme népérien**, notée $\ln$, l'**unique primitive** de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

Propriété 1 — conséquences immédiates

— $\ln$ est définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$, avec $\ln 1 = 0$ et $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

— Comme $\frac{1}{x} > 0$, $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$.

— Signe : $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$; $\ln 1 = 0$; $\ln x > 0$ si $x > 1$.

— Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $\ln a = \ln b \iff a = b$ et $\ln a < \ln b \iff a < b$.

2. Le nombre e

Définition 2

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, et (voir IV) $\ln(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$. Il existe donc un unique réel, noté e , tel que $\ln e = 1$. On a $e \approx 2,718$.

Exemple 1

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \ln x$. Étudier les variations de f et en déduire que $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

► Afficher / Masquer la solution

II. Propriétés algébriques

Propriété 2

Pour tous réels $a > 0$, $b > 0$ et tout rationnel r :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b,$

$\ln \frac{1}{a} = -\ln a,$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b,$

$\ln(a^r) = r \ln a,$

$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a.$

Remarque — idée de la preuve

Pour $b > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto \ln(bx)$ a pour dérivée $\frac{b}{bx} = \frac{1}{x}$: elle diffère de $\ln$ d'une constante, que l'on obtient en $x = 1$: $\ln(bx) = \ln x + \ln b$.

Exemple 2

Exprimer $\ln 12$ et $\ln \frac{\sqrt{e}}{8}$ en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$, puis calculer $\ln(e^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

► [Afficher](#) / [Masquer la solution](#)

III. Équations et inéquations

Méthode — résoudre une équation ou une inéquation avec $\ln$

1. Déterminer le domaine D de validité (arguments des $\ln$ strictement positifs).
2. Se ramener à $\ln A = \ln B$ (équivalent à $A = B$) ou $\ln A < \ln B$ (équivalent à $A < B$), avec $A > 0$, $B > 0$; ou poser $X = \ln x$.
3. Ne garder que les solutions appartenant à D .

Application 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(E) : \ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln 3$ et $(I) : \ln^2 x - \ln x - 2 < 0$.

► [Afficher](#) / [Masquer la solution](#)

Application 2 — seuil

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\frac{2}{3}\right)^n < 0,01$.

► Afficher / Masquer la solution

IV. Limites et courbe**Propriété 3 — limites de référence**

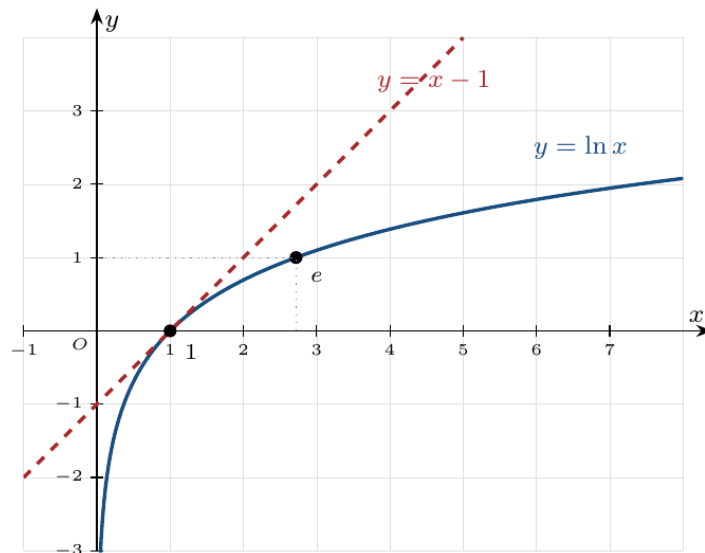
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$.

Remarque

- $x = 0$ est une asymptote verticale de $(C_{\ln})$; en $+\infty$, $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$: branche parabolique de direction (Ox) .
- $(C_{\ln})$ est concave ($\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$); sa tangente en $(1; 0)$ a pour équation $y = x - 1$.

**Exemple 3**

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+3x)}{x}$.

► Afficher / Masquer la solution

V. Dérivée de $\ln \circ u$ et primitives de $\frac{u'}{u}$

Propriété 4

On considère une fonction u dérivable sur un intervalle I .

- Si $u(x) > 0$ sur I , alors $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
- Si $u(x) \neq 0$ sur I , alors $x \mapsto \ln |u(x)|$ est dérivable sur I et $(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$. Ainsi les primitives de $\frac{u'}{u}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln |u(x)| + c$.

Exemple 4

- Calculer la dérivée de $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{3}{3x-2}$ sur $] \frac{2}{3}; +\infty[$ et une primitive de $x \mapsto \tan x$ sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
- Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ sur $]1; +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

VI. Logarithme de base a

Définition 3

On considère un réel $a > 0$ avec $a \neq 1$. La fonction **logarithme de base a** est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$. Le **logarithme décimal** est $\log = \log_{10}$.

Propriété 5

- $\log_a$ vérifie les mêmes propriétés algébriques que $\ln$; $\log_a(a) = 1$ et $\log_a(a^r) = r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
- $(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln a}$: $\log_a$ est strictement croissante si $a > 1$, strictement décroissante si $0 < a < 1$.
- $\log(10^n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple 5

Calculer $\log_2(32)$ et $\log(0,001)$, puis résoudre l'équation $\log_3 x = 2$.

► Afficher / Masquer la solution

Résumé : fonctions logarithmes

À retenir	
Propriété	Formule
Dérivée	$(\ln x)' = \frac{1}{x} ; (\ln u)' = \frac{u'}{u}$
Algèbre	$\ln(ab) = \ln a + \ln b ; \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b ; \ln a^r = r \ln a$
Limites	$\ln x \xrightarrow{+\infty} +\infty ; \ln x \xrightarrow{0^+} -\infty ; \frac{\ln x}{x} \xrightarrow{+\infty} 0 ; x \ln x \xrightarrow{0^+} 0$
Limites en 1 et 0	$\frac{\ln x}{x-1} \xrightarrow{1} 1 ; \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{0} 1$
Primitives	$\frac{u'}{u} \rightarrow \ln u + c$
Base a	$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$