

Cours — Chapitre 05

Primitives

Plan du chapitre. I. Notion de primitive — II. Primitives d’une fonction continue — III. Primitives et opérations — IV. Primitives des fonctions usuelles et formules — Résumé.

I. Notion de primitive

1. Définition

Définition 1 — primitive

On considère une fonction f définie sur un intervalle I . On appelle **primitive de f sur I** toute fonction F **dérivable sur I** telle que

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

2. Exemples

Exemple 1

Dans chaque cas, vérifier que la fonction proposée est une primitive de la fonction donnée :

- $f(x) = 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$, et $F(x) = x^3 + x$;
- $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$, et $x \mapsto \sqrt{x}$;
- $h(x) = \cos x$ sur $\mathbb{R}$, et $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \sin x + 2$;
- $k(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$, et $K(x) = x + \frac{1}{x}$.

► Afficher / Masquer la solution

Attention

On parle toujours d’une primitive **sur un intervalle**. Sur une réunion d’intervalles disjoints, comme $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, on travaille séparément sur chaque intervalle.

II. Primitives d’une fonction continue

1. Existence

Théorème — existence (admis)

Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I .

2. Ensemble des primitives

Propriété 1

On considère une fonction f admettant une primitive F sur un intervalle I . Alors les primitives de f sur I sont exactement les fonctions

$$x \mapsto F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Remarque — idée de la preuve

Si G est une autre primitive, $(G - F)' = f - f = 0$ sur l'intervalle I , donc $G - F$ est constante sur I . Réciproquement, $(F + c)' = F' = f$.

3. Primitive vérifiant une condition initiale

Propriété 2 — unicité

On considère une fonction f admettant des primitives sur un intervalle I , un réel $x_0 \in I$ et un réel y_0 . Il existe une **unique** primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Application 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 2x + 5$. Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.

► Afficher / Masquer la solution

III. Primitives et opérations

Propriété 3 — linéarité

On considère deux fonctions f et g de primitives respectives F et G sur un intervalle I , et un réel k .

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I ;
- kF est une primitive de kf sur I .

Attention

Il n'existe **pas** de formule générale pour une primitive d'un produit ou d'un quotient : $x^2 \times x$ n'admet pas $\frac{x^3}{3} \times \frac{x^2}{2}$ pour primitive. On cherche à reconnaître une forme du tableau du paragraphe IV.

IV. Primitives des fonctions usuelles et formules

1. Fonctions usuelles

À retenir — primitives usuelles ($c \in \mathbb{R}$)

Fonction f	Primitives F	Intervalle I
a (constante)	$ax + c$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
x^r ($r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$)	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$

2. Formules de composition**Propriété 4 — formules**

On considère une fonction u dérivable sur un intervalle I (u' continue), et des réels $a \neq 0, b$.

Fonction	Une primitive	Condition
$u' u^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	—
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ sur I
$\frac{u'}{u^n}$ ($n \geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	$u(x) \neq 0$ sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ sur I
$u' u^r$ ($r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$)	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$	$u(x) > 0$ sur I
$u' \times (v' \circ u)$	$v \circ u$	v dérivable sur $u(I)$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b)$	—
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b)$	—

Exemple 2

Déterminer une primitive F de f sur l'intervalle indiqué :

- $f(x) = 2x(x^2 + 3)^4$ sur $\mathbb{R}$;
- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ sur $\mathbb{R}$;
- $f(x) = \frac{3}{(3x - 1)^2}$ sur $] \frac{1}{3}; +\infty[$;
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ sur $]0; +\infty[$;
- $f(x) = \sin(2x) \cos^3(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

Méthode — ajuster une constante

Pour reconnaître $u'u^n$, on écrit $f = k \times u'u^n$ en faisant apparaître le facteur k nécessaire : par exemple $x(x^2 - 1)^3 = \frac{1}{2} \times 2x(x^2 - 1)^3$.

3. Applications corrigées

Application 2 — décomposition d’une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3}{(x - 1)^2}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x > 1$, $f(x) = a + \frac{b}{(x - 1)^2}$.

2. En déduire la primitive F de f sur $]1; +\infty[$ telle que $F(2) = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

Application 3 — linéarisation

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = \cos^2 x$.

► Afficher / Masquer la solution

Application 4 — dérivée puis primitive

On considère les fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. En déduire une primitive de g sur $]0; +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

Résumé : primitives

À retenir	
Notion	À retenir
Définition	F primitive de f sur $I \iff F' = f$ sur I
Existence	f continue sur $I \Rightarrow f$ admet des primitives sur I
Ensemble	toutes les primitives : $F + c, c \in \mathbb{R}$
Condition initiale	une unique primitive vérifie $F(x_0) = y_0$
Formules clés	$u'u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$; $\frac{u'}{u^2} \rightarrow -\frac{1}{u}$; $\frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u}$; $u'u^r \rightarrow \frac{u^{r+1}}{r+1}$