

Cours — Chapitre 04

Suites numériques

2ème Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Rappels — II. Limite d’une suite — III. Suites monotones et convergence — IV. Critères de convergence par comparaison — V. Limites des suites (q^n) et (n^r) — VI. Suites et fonctions — Résumé.

I. Rappels

1. Suites majorées, minorées, bornées ; monotonie

Définition 1

On considère une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ de nombres réels.

- (u_n) est **majorée** s’il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$; **minorée** s’il existe un réel m tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \geq n_0$; **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.
- (u_n) est **croissante** (resp. **décroissante**) si $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$) pour tout $n \geq n_0$; avec des inégalités strictes, on parle de suite strictement croissante (resp. décroissante).

Méthode — étudier la monotonie

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$; lorsque tous les termes sont strictement positifs, on peut aussi comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. Si $u_n = f(n)$, la monotonie de f sur $[n_0; +\infty[$ donne celle de (u_n) .

2. Raisonnement par récurrence

Propriété 1 — principe de récurrence

On considère une propriété $P(n)$ dépendant d’un entier naturel $n \geq n_0$. Si $P(n_0)$ est vraie (**initialisation**) et si, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ vraie entraîne $P(n + 1)$ vraie (**hérédité**), alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.

► Afficher / Masquer la solution

3. Suites arithmétiques et géométriques

À retenir		
	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q u_n$
Terme général	$u_n = u_p + (n - p)r$	$u_n = u_p q^{n-p}$
Somme $u_p + \cdots + u_n$	$\frac{(n - p + 1)(u_p + u_n)}{2}$	$u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \ (q \neq 1)$

II. Limite d’une suite

1. Définitions

Définition 2 — suite convergente

On dit que la suite (u_n) **converge** vers un réel ℓ (ou admet la limite ℓ) si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$. Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

Définition 3 — limite infinie

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ si, pour tout réel A , tous les termes de la suite sont supérieurs à A à partir d'un certain rang.
Définition analogue pour $-\infty$.

Propriété 2

- Si une suite converge, sa limite est **unique**.
- Si $u_n = f(n)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (fini ou infini), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.
- Les règles opératoires sur les limites (somme, produit, quotient) et les formes indéterminées sont les mêmes que pour les fonctions.

2. Suites de référence

Propriété 3

Pour tout entier $p \geq 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$.

Exemple 2

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - n}{n^2 + 5}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

► Afficher / Masquer la solution

III. Suites monotones et convergence

Théorème — convergence monotone

- Toute suite **croissante et majorée** est convergente.
- Toute suite **décroissante et minorée** est convergente.

Propriété 4

- Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$; une suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.
- Si (u_n) est croissante et converge vers ℓ , alors $u_n \leq \ell$ pour tout n (de même $u_n \geq \ell$ si elle est décroissante).

Application 1 — convergence monotone

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir l'exemple 1). Montrer que (u_n) est convergente.

► Afficher / Masquer la solution

Attention

Le théorème donne l'**existence** de la limite, pas sa valeur : une suite croissante majorée par 3 converge vers une limite $\ell \leq 3$, qui n'est pas forcément 3.

IV. Critères de convergence par comparaison**Propriété 5 — comparaison**

On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème — des gendarmes (encadrement)

On considère trois suites (u_n) , (v_n) , (w_n) telles que $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang. Si (v_n) et (w_n) convergent vers la **même** limite ℓ , alors (u_n) converge vers ℓ .

Propriété 6 — conséquence

Si $|u_n - \ell| \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Application 2 — encadrement

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \frac{2n + \sin n}{n}$. Déterminer sa limite.

► Afficher / Masquer la solution

V. Limites des suites (q^n) et (n^r) **Propriété 7 — limite de (q^n)**

On considère un réel q .

- Si $q > 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$: $q^n = 1$ et la limite vaut 1.
- Si $-1 < q < 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$: la suite (q^n) n'a pas de limite.

Remarque — idée de la preuve pour $q > 1$

On écrit $q = 1 + a$ avec $a > 0$; par récurrence, $(1 + a)^n \geq 1 + na$ (inégalité de Bernoulli), et $1 + na \rightarrow +\infty$, d'où le résultat par comparaison.

Propriété 8 — limite de (n^r)

On considère un nombre rationnel r non nul : si $r > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = +\infty$; si $r < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = 0$.

Exemple 3

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 1}$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right)$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-\frac{2}{3}}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n}$.

► Afficher / Masquer la solution

Application 3 — suite géométrique et limite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 2$.

1. Montrer que (v_n) est géométrique. 2. En déduire u_n en fonction de n , puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

► Afficher / Masquer la solution

VI. Suites et fonctions**1. Suite $v_n = f(u_n)$** **Propriété 9**

On considère une fonction f continue en un réel ℓ et une suite (u_n) de termes dans le domaine de f . Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Exemple 4

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n+1}{4n}}$.

► Afficher / Masquer la solution

2. Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ **Théorème — limite d'une suite récurrente**

On considère une fonction f **continue** sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$, et la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) **converge** vers ℓ et si $\ell \in I$, alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Remarque

- La condition $f(I) \subset I$ garantit que tous les termes sont dans I (récurrence).
- Si f est croissante sur I , la suite (u_n) est monotone : son sens dépend de la comparaison de u_0 et u_1 .

— Lorsque I est un intervalle fermé (de la forme $[a; b]$ ou $[a; +\infty[$), la limite d'une suite convergente de termes dans I appartient à I .

Exemple 5

Reprenons la suite $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ (application 1), qui est convergente. Déterminer sa limite.

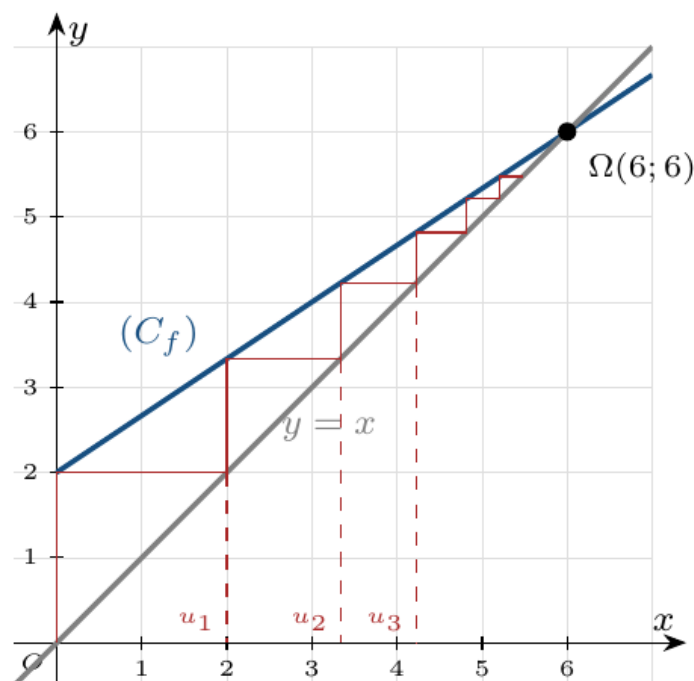
► Afficher / Masquer la solution

Application 4

On considère la fonction f définie sur $I = [0; 6]$ par $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $f(I) \subset I$, puis que $0 \leq u_n \leq 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que (u_n) est croissante, puis qu'elle converge, et déterminer sa limite.

► Afficher / Masquer la solution



Résumé : suites numériques

À retenir	
Outil	Énoncé
Convergence monotone	croissante + majorée, ou décroissante + minorée $\Rightarrow$ convergente
Comparaison	$u_n \leq v_n$ et $u_n \rightarrow +\infty \Rightarrow v_n \rightarrow +\infty$
Gendarmes	$v_n \leq u_n \leq w_n, v_n \rightarrow \ell, w_n \rightarrow \ell \Rightarrow u_n \rightarrow \ell$
Majoration de l'écart	$ u_n - \ell \leq v_n$ et $v_n \rightarrow 0 \Rightarrow u_n \rightarrow \ell$
Suite (q^n)	$q > 1 : +\infty ; -1 < q < 1 : 0 ; q \leq -1 : \text{pas de limite}$
Suite (n^r)	$r > 0 : +\infty ; r < 0 : 0$
$u_{n+1} = f(u_n)$	f continue sur $I, f(I) \subset I, u_n \rightarrow \ell \in I \Rightarrow f(\ell) = \ell$