

Cours — Chapitre 03

Étude de fonctions

2ème Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT)

Lycée Qualifiant Ibn Hazm

Prof. El Koudri Hamza

2026–2027

Plan du chapitre. I. Branches infinies — II. Concavité et points d’inflexion — III. Éléments de symétrie d’une courbe — IV. Étude et représentation graphique d’une fonction — Résumé.

Dans tout le chapitre, le plan est muni d’un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et (C_f) désigne la courbe représentative d’une fonction f .

I. Branches infinies

Définition 1 — branche infinie

On dit que la courbe (C_f) admet une **branche infinie** lorsque l’une au moins des coordonnées d’un point $M(x; f(x))$ de (C_f) tend vers l’infini : $x \rightarrow \pm\infty$, ou $f(x) \rightarrow \pm\infty$ quand x tend vers un réel a .

1. Asymptotes verticales et horizontales

Définition 2 — asymptote verticale

On considère un réel a . Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$, la droite d’équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à (C_f) .

Définition 3 — asymptote horizontale

On considère un réel b . Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$), la droite d’équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à (C_f) au voisinage de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$).

Exemple 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. Déterminer les asymptotes à (C_f) .

► Afficher / Masquer la solution

2. Asymptote oblique

Définition 4 — asymptote oblique

On considère deux réels a et b avec $a \neq 0$. La droite (D) d’équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à (C_f) au voisinage de $+\infty$ lorsque
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$
Définition analogue au voisinage de $-\infty$.

Propriété 1 — recherche pratique d’une asymptote oblique

La droite d’équation $y = ax + b$ ($a \neq 0$) est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$ si, et seulement si,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \in \mathbb{R}^*) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b \quad (b \in \mathbb{R}).$$

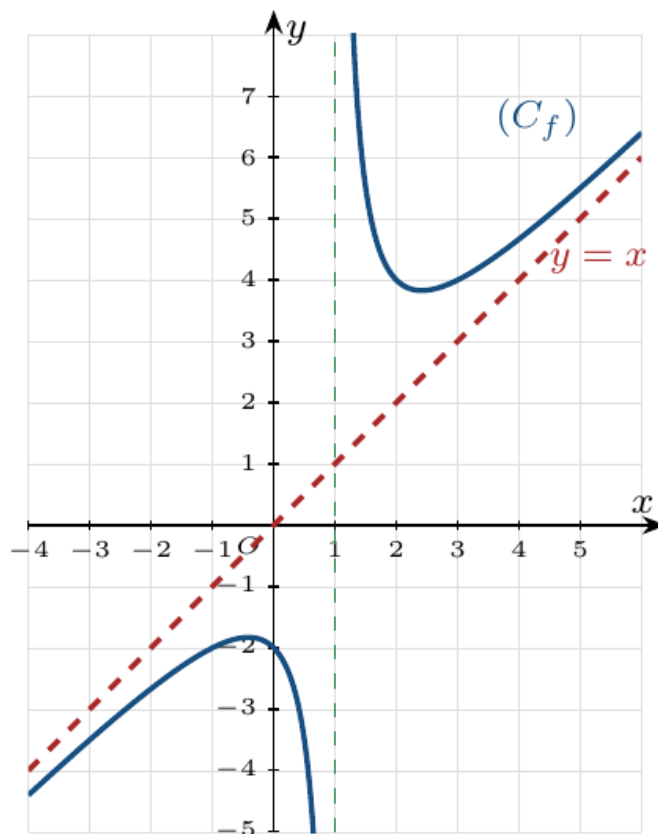
Remarque — position relative

La position de (C_f) par rapport à $(D) : y = ax + b$ se déduit du **signe** de $f(x) - (ax + b)$: si ce signe est positif sur un intervalle I , (C_f) est au-dessus de (D) sur I ; s’il est négatif, (C_f) est en dessous ; les points communs correspondent aux solutions de $f(x) = ax + b$.

Exemple 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$. Montrer que la droite $(D) : y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$, puis étudier la position relative de (C_f) et (D) .

► Afficher / Masquer la solution



Application 1 — méthode des deux limites

On considère la fonction f définie sur $D =]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$. Étudier les branches infinies de (C_f) .

► Afficher / Masquer la solution

3. Branches paraboliques**Propriété 2 — classification au voisinage de $+\infty$ (de même en $-\infty$)**

On suppose $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ et l'on étudie $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

- Si cette limite vaut $\pm\infty$: (C_f) admet une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.
- Si cette limite vaut 0 : (C_f) admet une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.
- Si cette limite vaut un réel $a \neq 0$, on étudie $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$:
 - si elle vaut un réel b : la droite $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** ;
 - si elle vaut $\pm\infty$: (C_f) admet une **branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$** .

Exemple 3

Déterminer la nature de la branche infinie en $+\infty$ de la courbe de chacune des fonctions : $f(x) = x^2$; $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) ; $f(x) = x + \sqrt{x}$ ($x \geq 0$).

► Afficher / Masquer la solution

Remarque

Une branche parabolique « de direction (Ox) » ne signifie pas que la courbe s'approche d'une droite horizontale : $\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$, mais de plus en plus lentement par rapport à x .

II. Concavité et points d'inflexion

1. Fonction convexe, fonction concave

Définition 5 — concavité

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I .

- (C_f) est **convexe** sur I si elle est située **au-dessus** de chacune de ses tangentes en des points d'abscisse appartenant à I .
- (C_f) est **concave** sur I si elle est située **en dessous** de chacune de ses tangentes sur I .

Propriété 3 — concavité et dérivées

On considère une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I .

- Si f' est croissante sur I , autrement dit si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors (C_f) est **convexe** sur I .
- Si f' est décroissante sur I , autrement dit si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors (C_f) est **concave** sur I .

2. Point d'inflexion

Définition 6 — point d'inflexion

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. Le point $A(x_0; f(x_0))$ est un **point d'inflexion** de (C_f) lorsque la courbe **change de concavité** en A ; la courbe traverse alors sa tangente en ce point.

Propriété 4 — caractérisation

On considère une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

- Si f'' **s'annule en x_0 en changeant de signe**, alors $A(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C_f) .
- Si f'' s'annule en x_0 **sans changer de signe**, alors $A(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion (à tangente horizontale).

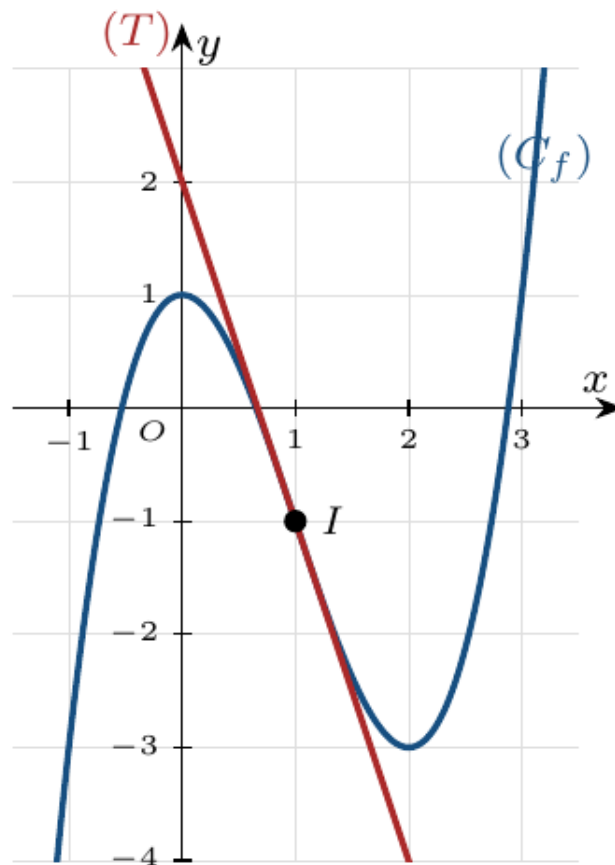
Attention

$f''(x_0) = 0$ ne suffit pas : pour $f(x) = x^4$, $f''(0) = 0$ mais $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ ne change pas de signe; la courbe est convexe sur $\mathbb{R}$ et n'a pas de point d'inflexion.

Application 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Étudier la concavité de (C_f) et déterminer son point d'inflexion.

► [Afficher / Masquer la solution](#)



III. Éléments de symétrie d'une courbe

1. Axe de symétrie

Propriété 5 — axe de symétrie

On considère une fonction f de domaine D_f et un réel a . La droite d'équation $x = a$ est un **axe de symétrie** de (C_f) (repère orthogonal) si, et seulement si, pour tout $x \in D_f$:

$$2a - x \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) = f(x).$$

Exemple 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Montrer que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de (C_f) .

► Afficher / Masquer la solution

2. Centre de symétrie

Propriété 6 — centre de symétrie

On considère une fonction f de domaine D_f et un point $\Omega(a; b)$. Le point Ω est un **centre de symétrie** de (C_f) si, et seulement si, pour tout $x \in D_f$:

$$2a - x \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) + f(x) = 2b.$$

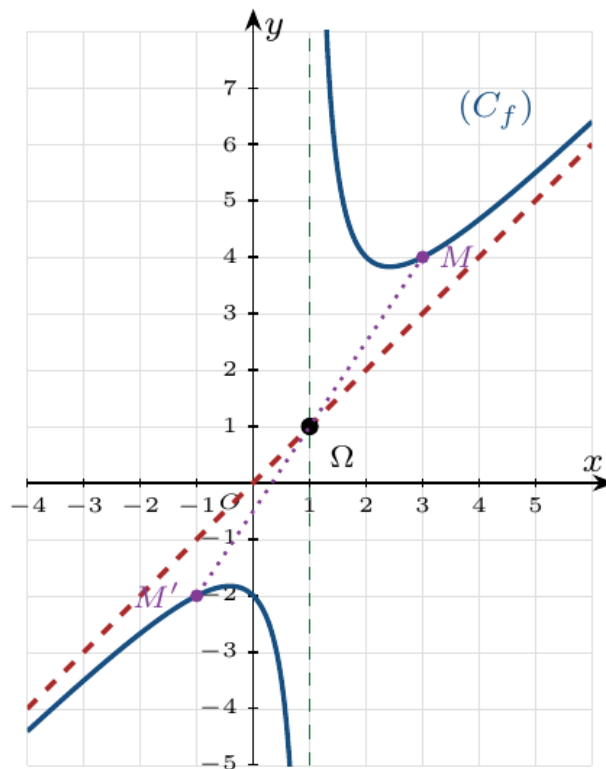
Remarque

Lorsque $a = 0$ (respectivement $a = 0$ et $b = 0$), on retrouve les fonctions paires (axe (Oy)) et impaires (centre O). Un élément de symétrie permet de réduire le domaine d'étude : on étudie f sur la moitié du domaine, puis on complète la courbe par symétrie.

Application 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = x + \frac{2}{x-1}$. Montrer que le point $\Omega(1;1)$ est un centre de symétrie de (C_f) .

► Afficher / Masquer la solution



IV. Étude et représentation graphique d'une fonction

1. Plan d'étude

Méthode — étude complète d'une fonction

1. Déterminer le domaine de définition D_f ; chercher d'éventuels éléments de symétrie (pour réduire le domaine d'étude).
2. Étudier la continuité, calculer les limites aux bornes de D_f .
3. Étudier la dérivabilité (en particulier aux points « à problème » : bornes fermées, raccords, racines) et interpréter géométriquement.
4. Calculer $f'(x)$, étudier son signe, dresser le tableau de variations.
5. Étudier les branches infinies (asymptotes, branches paraboliques) et les positions relatives.
6. Étudier la concavité (signe de f'') et les points d'inflexion.
7. Placer les points remarquables (intersections avec les axes, extremums, points d'inflexion), tracer les

asymptotes et les tangentes utiles, puis tracer (C_f) .

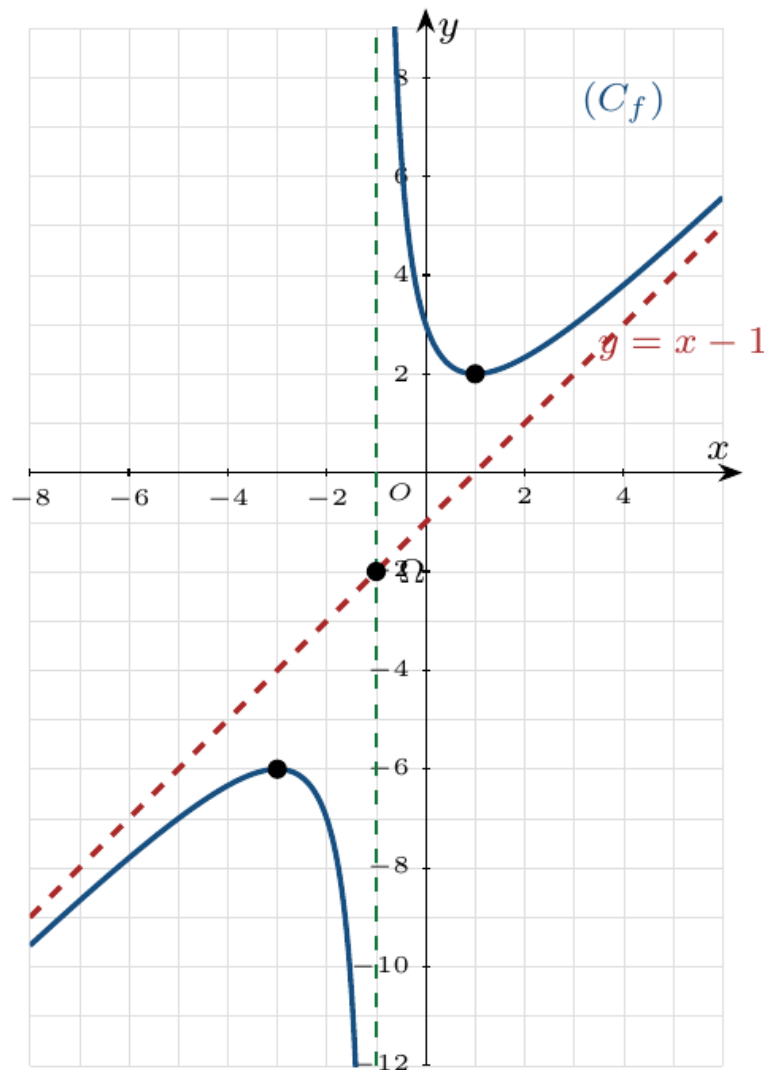
2. Application corrigée : une étude complète

Application 4

On considère la fonction f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de D et interpréter.
2. Étudier les variations de f .
3. Montrer que la droite $(D) : y = x - 1$ est une asymptote oblique et étudier la position de (C_f) par rapport à (D) .
4. Montrer que $\Omega(-1; -2)$ est un centre de symétrie de (C_f) .
5. Étudier la concavité de (C_f) , puis tracer (C_f) .

► [Afficher](#) / [Masquer la solution](#)



3. Résolution graphique et position relative de deux courbes

Propriété 7

On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle I .

- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et (C_g) ; les solutions de $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite horizontale $y = m$.
- (C_f) est au-dessus de (C_g) sur I si, et seulement si, $f(x) - g(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Exemple 5

Avec la fonction de l'application 4, déterminer, suivant les valeurs du réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

► Afficher / Masquer la solution

Remarque — courbe de la réciproque

Lorsque f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , la courbe de f^{-1} se déduit de celle de f par la symétrie d'axe la droite $y = x$ (repère orthonormé) : une tangente horizontale devient verticale, une asymptote $y = b$ devient une asymptote $x = b$, une branche parabolique de direction (Ox) devient une branche parabolique de direction (Oy) .

Résumé : étude de fonctions

À retenir

Situation	Conclusion
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$	asymptote verticale $x = a$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$	asymptote horizontale $y = b$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$	asymptote oblique $y = ax + b$
$\frac{f(x)}{x} \rightarrow \pm\infty$	branche parabolique de direction (Oy)
$\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$	branche parabolique de direction (Ox)
$\frac{f(x)}{x} \rightarrow a \neq 0$ et $f(x) - ax \rightarrow \pm\infty$	branche parabolique de direction $y = ax$
$f'' \geq 0$ sur I / $f'' \leq 0$ sur I	(C_f) convexe / concave sur I
f'' s'annule en changeant de signe en x_0	point d'inflexion d'abscisse x_0
$f(2a - x) = f(x)$	axe de symétrie $x = a$
$f(2a - x) + f(x) = 2b$	centre de symétrie $\Omega(a; b)$