

Cours — Chapitre 02

Dérivation

2ème Bac Sciences Expérimentales (PC – SVT) · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Dérivabilité en un point (rappels) — II. Dérivabilité et continuité — III. Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée — IV. Applications de la dérivée — V. Dérivée d’une fonction composée — VI. Dérivée de la fonction réciproque — Résumé.

I. Dérivabilité en un point (rappels)

1. Nombre dérivé et tangente

Définition 1 — dérivabilité en un point

On considère une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et un réel $a \in I$. On dit que f est **dérivable en** a lorsque le taux d’accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une **limite finie** ℓ quand x tend vers a . Ce réel est le **nombre dérivé** de f en a , noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Propriété 1 — interprétation géométrique

Si f est dérivable en a , la courbe (C_f) admet au point $A(a; f(a))$ une **tangente** de coefficient directeur $f'(a)$, d’équation

$$(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exemple 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Montrer que f est dérivable en 2, calculer $f'(2)$ et déterminer une équation de la tangente à (C_f) au point d’abscisse 2.

► Afficher / Masquer la solution

2. Dérivabilité à droite, à gauche

Définition 2 — dérivabilité à droite, à gauche

— f est **dérivable à droite** en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell_d$ (réel) ; on note $f'_d(a) = \ell_d$.

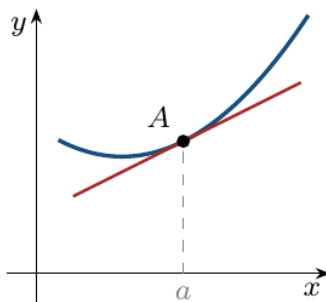
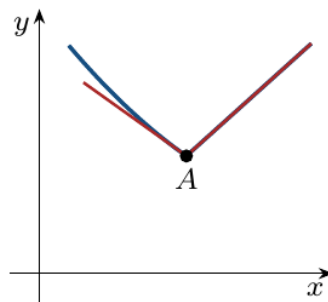
— f est **dérivable à gauche** en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell_g$ (réel) ; on note $f'_g(a) = \ell_g$.

Propriété 2

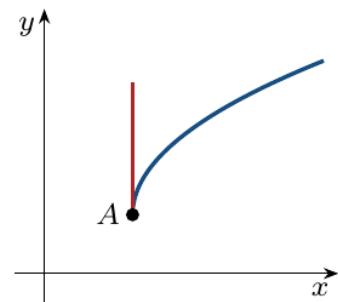
f est dérivable en a si, et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche en a avec $f'_d(a) = f'_g(a)$; on a alors $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

3. Les différentes situations graphiques

Limite du taux d'accroissement	Conclusion	Interprétation graphique
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$ (réel)	f dérivable en a , $f'(a) = \ell$	tangente $y = \ell(x - a) + f(a)$
$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell_d$ (réel)	f dérivable à droite, $f'_d(a) = \ell_d$	demi-tangente $y = \ell_d(x - a) + f(a)$, $x \geq a$
$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell_g$ (réel)	f dérivable à gauche, $f'_g(a) = \ell_g$	demi-tangente $y = \ell_g(x - a) + f(a)$, $x \leq a$
$\ell_d \neq \ell_g$ (réels)	f non dérivable en a	point anguleux : deux demi-tangentes
limite $\pm\infty$ (à droite ou à gauche)	f non dérivable (à droite ou à gauche)	demi-tangente verticale au point $A(a; f(a))$

dérivable en a : tangente

point anguleux



demi-tangente verticale

Application 1

Étudier la dérivabilité de la fonction f en a , puis interpréter graphiquement le résultat.

- $f(x) = |x^2 - 1|$ et $a = 1$.
- $f(x) = \sqrt{x - 2}$ (définie sur $[2; +\infty[$) et $a = 2$.

► Afficher / Masquer la solution

4. Approximation affine

Propriété 3 — approximation affine

Si f est dérivable en a , alors pour h voisin de 0 :

$$f(a + h) \approx f(a) + hf'(a).$$

La fonction $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ est l'**approximation affine** de f au voisinage de a ; graphiquement, la tangente « colle » à la courbe près du point de contact.

Exemple 2

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$, et $a = 4$. Calculer $f'(4)$ et en déduire une valeur approchée de $\sqrt{4,02}$.

► Afficher / Masquer la solution

II. Dérivabilité et continuité

Propriété 4

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Remarque 1

- *Démonstration.* Pour $x \neq a$: $f(x) = f(a) + (x - a) \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, qui tend vers $f(a) + 0 \times f'(a) = f(a)$.
- **La réciproque est fautive** : $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais non dérivable en 0 ($f'_d(0) = 1$, $f'_g(0) = -1$).
- Par contraposée : une fonction discontinue en a n'est pas dérivable en a .

III. Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée

1. Définitions

Définition 3

- f est dérivable sur un intervalle ouvert I si elle est dérivable en tout point de I .
- f est dérivable sur $[a; b]$ si elle est dérivable sur $]a; b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b .
- Si f est dérivable sur I , la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f sur I .

2. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f'	Intervalle de dérivabilité
$x \mapsto k$ (k réel)	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax + b$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$
$x \mapsto \sin(ax + b)$	$x \mapsto a \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax + b)$	$x \mapsto -a \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$

3. Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 5 — opérations

On considère deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I et un réel k .

Fonction	Dérivée	Condition
$u + v$	$u' + v'$	
ku	ku'	
uv	$u'v + uv'$	
u^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$nu'u^{n-1}$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I

Exemple 3

Calculer $f'(x)$ pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x^2 - 1)^3$, et $g'(x)$ pour la fonction g définie sur $] -1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

► Afficher / Masquer la solution

Remarque 2 — conséquences

Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$; les fonctions rationnelles sont dérivables sur chaque intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

4. Dérivées successives

Définition 4

Si f' est elle-même dérivable sur I , sa dérivée est la **dérivée seconde** de f , notée f'' . On définit de même $f''' = f^{(3)}$ et, pour $n \geq 1$, la dérivée n -ième $f^{(n)}$. En physique, on note aussi $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$ et $f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}(x)$.

Exemple 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, puis montrer que $f''(x) + 4f(x) = 0$ pour tout réel x .

► Afficher / Masquer la solution

IV. Applications de la dérivée

1. Sens de variation

Propriété 6 — signe de la dérivée et monotonie

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I .

- Si $f' = 0$ sur I , alors f est constante sur I .
- Si $f' \geq 0$ sur I (resp. $f' \leq 0$), alors f est croissante (resp. décroissante) sur I .
- Si $f' > 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est **strictement croissante** sur I (de même pour la stricte décroissance avec $f' < 0$).

2. Extremums

Propriété 7 — extremum

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

- Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.
- Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors $f(a)$ est un extremum local de f .

Remarque 3

La condition $f'(a) = 0$ ne suffit pas : pour $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ mais $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ ne change pas de signe, et f est strictement croissante : $f(0)$ n'est pas un extremum. Graphiquement, la tangente en O est horizontale et la courbe la traverse.

3. Inégalités

Méthode — démontrer une inégalité

Pour démontrer que $u(x) \leq v(x)$ sur I , on étudie les variations de la fonction $h = v - u$ et on montre que son minimum sur I est positif.

Application 2

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 5$. Dresser le tableau de variations de f , puis en déduire que $f(x) \geq 4$ pour tout réel x .
2. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x + \frac{1}{x}$. Montrer que $g(x) \geq 2$ pour tout $x > 0$.

► Afficher / Masquer la solution

4. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Propriété 8

On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle I , de courbes (C_f) et (C_g) .

- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et (C_g) .
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situés **au-dessous** de (C_g) .

V. Dérivée d'une fonction composée

Propriété 9 — dérivée d'une composée

On considère une fonction u définie sur un intervalle ouvert I et une fonction v définie sur un intervalle ouvert J tel que $u(I) \subset J$.

- Si u est dérivable en $a \in I$ et v dérivable en $u(a)$, alors $v \circ u$ est dérivable en a et $(v \circ u)'(a) = v'(u(a)) \times u'(a)$.
- Si u est dérivable sur I et v dérivable sur J , alors $v \circ u$ est dérivable sur I et

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'.$$

Exemple 5

Calculer $f'(x)$ pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{5})$, et $g'(x)$ pour la fonction g définie sur $]1; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

► Afficher / Masquer la solution

Application 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^3(2x)$. Calculer $f'(x)$.

► Afficher / Masquer la solution

VI. Dérivée de la fonction réciproque

1. Dérivabilité en un point

Propriété 10 — dérivée de la réciproque en un point

On considère une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I , et $a \in I$. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Remarque 4

- Si $f'(a) = 0$, la courbe (C_f) a une tangente horizontale en $A(a; b)$; par symétrie, $(C_{f^{-1}})$ a une tangente **verticale** au point $B(b; a)$ et f^{-1} n'est pas dérivable en b .
- La tangente à $(C_{f^{-1}})$ au point $B(b; a)$ a pour équation $y = (f^{-1})'(b)(x - b) + a$.

Application 4

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^3 + x + 1$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
2. Calculer $f(1)$, puis montrer que f^{-1} est dérivable en 3 et calculer $(f^{-1})'(3)$.
3. Donner une équation de la tangente à $(C_{f^{-1}})$ au point d'abscisse 3.

► Afficher / Masquer la solution

2. Dérivabilité sur un intervalle

Propriété 11

On considère une fonction f dérivable et strictement monotone sur un intervalle I . Si f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et

$$(\forall x \in J) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

3. Dérivée de la racine n -ième et des puissances rationnelles

Propriété 12

On considère un entier $n \geq 2$ et un rationnel r non nul.

- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
- Si u est dérivable et strictement positive sur I , alors $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$.
- La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(x^r)' = rx^{r-1}$; plus généralement $(u^r)' = ru'u^{r-1}$ si $u > 0$.

Remarque 5

Justification. $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ de dérivée $nx^{n-1} > 0$. Sa réciproque est donc dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$. La racine n -ième n'est pas dérivable en 0 : sa courbe admet en O une demi-tangente verticale.

Application 5

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$, sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = x^{\frac{3}{4}}$, sur $]0; +\infty[$.
3. $h(x) = \sqrt[4]{2x - 1}$, sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

Résumé : dérivation

À retenir — dérivation

- $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (finie) ; tangente $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Limite infinie : demi-tangente verticale ; $f'_d(a) \neq f'_g(a)$: point anguleux.
- Dérivable $\Rightarrow$ continue (réciproque fausse).
- $(uv)' = u'v + uv'$; $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $(u^n)' = nu'u^{n-1}$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$; $(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$.
- Signe de $f' \Rightarrow$ variations ; f' s'annule en changeant de signe $\Rightarrow$ extremum.
- $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ avec $b = f(a)$, $f'(a) \neq 0$; $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$; $(x^r)' = rx^{r-1}$.