

Cours — Chapitre 01

Continuité

Plan du chapitre. I. Continuité en un point — II. Continuité sur un intervalle — III. Image d’un intervalle par une fonction continue — IV. Opérations sur les fonctions continues — V. Théorème des valeurs intermédiaires — VI. Fonction réciproque d’une fonction continue et strictement monotone — VII. Racine n -ième et puissances rationnelles — Résumé.

I. Continuité en un point

1. Activité d’introduction

Activité 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$ si $x < 1$ et $f(x) = x + 1$ si $x \geq 1$, et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 1$ si $x < 1$ et $g(x) = x - 1$ si $x \geq 1$.

1. Calculer $f(1)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

2. Calculer $g(1)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$.

3. Tracer à main levée les deux courbes au voisinage du point d’abscisse 1. Laquelle peut-on tracer « sans lever le crayon » ?

► Afficher / Masquer la solution

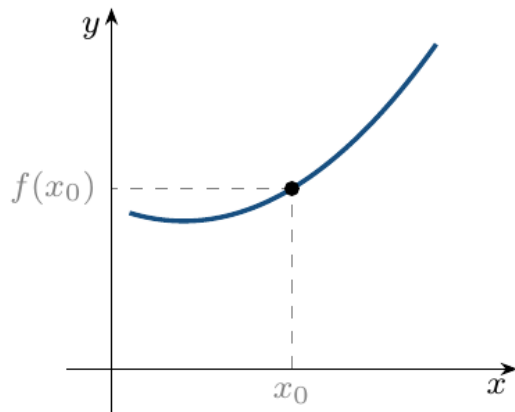
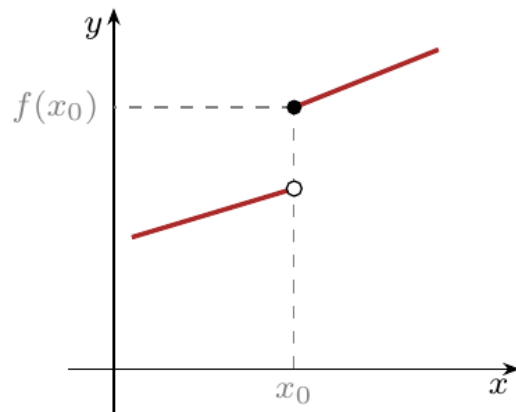
2. Définition

Définition 1 — continuité en un point

On considère une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et un réel $x_0 \in I$. On dit que f est **continue** en x_0 lorsque

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Dans le cas contraire, on dit que f est **discontinue** en x_0 .

 f continue en x_0  f discontinue en x_0 (saut)**Remarque 1**

- La continuité en x_0 exige trois choses : f est définie en x_0 ; f admet une limite finie en x_0 ; cette limite est égale à $f(x_0)$.
- Graphiquement, f est continue en x_0 lorsque la courbe (C_f) ne présente ni « saut » ni « trou » au point d'abscisse x_0 .

Exemple 1 — fonction rationnelle prolongée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{si } x \neq 2 \quad \text{et} \quad f(2) = 4.$$

► Afficher / Masquer la solution

Exemple 2 — une discontinuité

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{\sin(3x)}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad g(0) = 1.$$

► Afficher / Masquer la solution

Application 1

Étudier la continuité de la fonction f au point x_0 dans chacun des cas suivants.

1. f est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ si $x \neq 4$ et $f(4) = \frac{1}{4}$; $x_0 = 4$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ si $x \neq 1$ et $f(1) = 2$; $x_0 = 1$.

► Afficher / Masquer la solution

3. Continuité à droite, continuité à gauche

Définition 2 — continuité à droite, à gauche

- On considère une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[x_0; x_0 + a[$ avec $a > 0$. On dit que f est **continue à droite** en x_0 lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- On considère une fonction f définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - a; x_0]$ avec $a > 0$. On dit que f est **continue à gauche** en x_0 lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Propriété 1 — continuité et limites à droite et à gauche

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 est continue en x_0 si, et seulement si, elle est continue à droite **et** à gauche en x_0 , c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Exemple 3 — fonction définie par morceaux

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x - 1$ si $x < 1$ et $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$ si $x \geq 1$.

► Afficher / Masquer la solution

Application 2

On considère un réel a et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 2x + a \quad \text{si } x < 2 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 1} \quad \text{si } x \geq 2.$$

Déterminer la valeur de a pour laquelle f est continue en 2.

► Afficher / Masquer la solution

Application 3 — valeur absolue

On considère la fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{|x|}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$. Étudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.

► Afficher / Masquer la solution

II. Continuité sur un intervalle

1. Définitions

Définition 3 — continuité sur un intervalle

- Une fonction f est **continue sur l'intervalle ouvert** $]a; b[$ lorsqu'elle est continue en tout point de $]a; b[$.
- Une fonction f est **continue sur le segment** $[a; b]$ lorsqu'elle est continue sur $]a; b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b .
- On définit de même la continuité sur $[a; b[,]a; b]$, $[a; +\infty[$, $] - \infty; b]$, etc.

Remarque 2

Graphiquement, une fonction continue sur un intervalle I est une fonction dont la courbe se trace « sans lever le crayon » au-dessus de I .

2. Continuité des fonctions usuelles

Propriété 2 — fonctions usuelles (admis)

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur chacun des intervalles inclus dans son ensemble de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue sur chacun des intervalles $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4

Justifier la continuité de la fonction $x \mapsto 5x^4 - 3x + 2$ sur $\mathbb{R}$, puis préciser les intervalles sur lesquels la fonction $x \mapsto \frac{4x^2 + 3}{x^2 - 1}$ est continue.

► [Afficher / Masquer la solution](#)

3. Un exemple de fonction discontinue : la partie entière

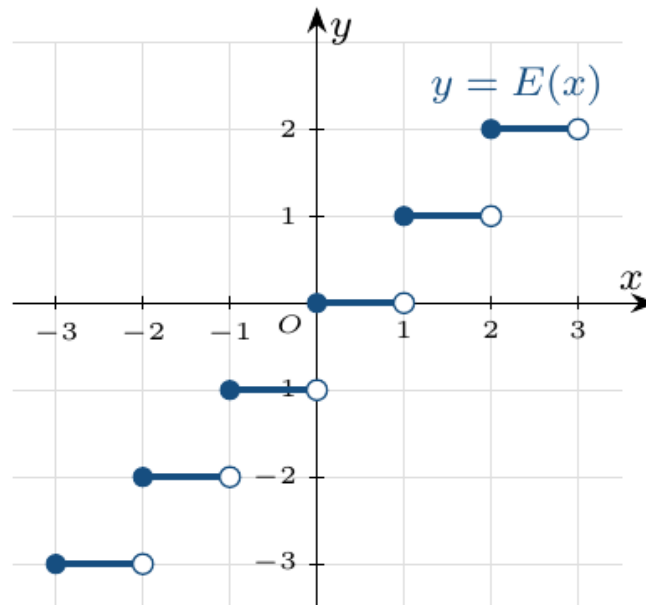
Définition 4 — partie entière

Pour tout réel x , il existe un unique entier relatif p tel que $p \leq x < p + 1$. Cet entier est appelé la **partie entière** de x et noté $E(x)$. La fonction $E : x \mapsto E(x)$ est la fonction partie entière.

Exemple 5

Calculer $E(2,7)$, $E(3)$, $E(-0,4)$, $E(-2)$ et $E(\pi)$, puis étudier la continuité de la fonction E en un entier p .

► Afficher / Masquer la solution



III. Image d'un intervalle par une fonction continue

1. Image d'un intervalle, image d'un segment

Définition 5 — image d'un intervalle

On considère une fonction f définie sur un intervalle I . On appelle **image de I par f** l'ensemble $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$.

Propriété 3 — admise

- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- L'image d'un segment $[a; b]$ par une fonction continue est un segment $[m; M]$, où m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur $[a; b]$.

Remarque 3

L'image d'un intervalle n'est pas forcément un intervalle « de même nature ». Pour la fonction $x \mapsto x^2$, l'image de l'intervalle ouvert $] - 1; 2[$ est $[0; 4[$, qui n'est ni ouvert ni fermé.

2. Cas d'une fonction continue et strictement monotone

Propriété 4 — image par une fonction continue strictement monotone

On considère une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I (a et b sont des réels, $a < b$).

Intervalle I	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)$
$]a; b]$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)$	$f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
$]a; b[$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
$[a; +\infty[$	$f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)$
$] - \infty; b]$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(b)$	$f(b); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Application 4

Déterminer l'image $f(I)$ de l'intervalle I dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ et $I = [0; 2]$.
2. $f(x) = -x^2 + 4x$ et $I =] - \infty; 1]$.
3. $f(x) = x^2 - 2x$ et $I = [-1; 2]$.

► Afficher / Masquer la solution

IV. Opérations sur les fonctions continues

1. Opérations algébriques

Propriété 5 — opérations (admis)

On considère deux fonctions f et g continues sur un intervalle I et un réel k . Alors :

- les fonctions $f + g$, kf et $f \times g$ sont continues sur I ;
- si g ne s'annule pas sur I , les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I ;
- si f est positive sur I , la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I ;
- la fonction $|f|$ est continue sur I ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f^n est continue sur I .

Exemple 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x \cos x$.

► Afficher / Masquer la solution

Application 5

Étudier la continuité de la fonction f sur l'intervalle I .

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} + 2x$ et $I =]1; +\infty[$.
2. $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ et $I = \mathbb{R}$.

► [Afficher / Masquer la solution](#)

2. Continuité d'une fonction composée**Propriété 6 — composée (admis)**

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et une fonction g définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$.

- Si f est continue en $x_0 \in I$ et g continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .
- Si f est continue sur I et g continue sur J , alors $g \circ f$ est continue sur I .

Exemple 7

Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(x^2 - 3x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $x \mapsto \sqrt{4 - x^2}$ est continue sur $[-2; 2]$.

► [Afficher / Masquer la solution](#)

3. Limite d'une fonction composée**Propriété 7 — limite d'une composée**

On considère une fonction f et une fonction g continue en un réel ℓ . Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\ell).$$

Le résultat reste valable lorsque x_0 est remplacé par x_0^+ , x_0^- , $+\infty$ ou $-\infty$.

Application 6

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 1}{x^2 + 3}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 1}{2x - 1}\right)$.

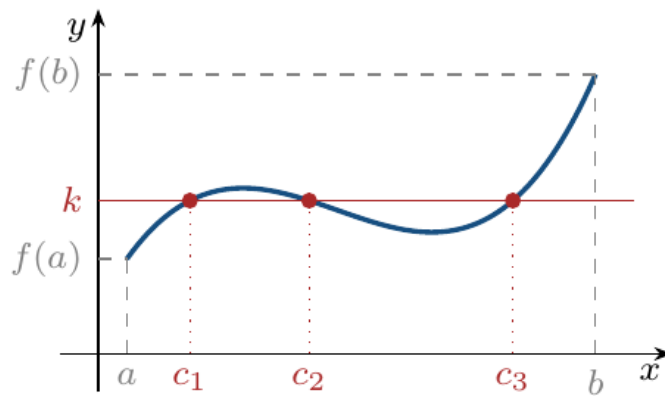
► Afficher / Masquer la solution

V. Théorème des valeurs intermédiaires

1. Énoncés

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

On considère une fonction f **continue** sur un segment $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une** solution dans $[a; b]$.


Propriété 8 — existence d'un zéro

On considère une fonction f continue sur $[a; b]$. Si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle ouvert $]a; b[$.

Propriété 9 — unicité (cas strictement monotone)

On considère une fonction f **continue et strictement monotone** sur $[a; b]$. Si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution dans $]a; b[$.

Remarque 4

- Sans la continuité, la conclusion peut être fausse : la fonction partie entière vérifie $E(0) = 0$ et $E(1) = 1$, mais l'équation $E(x) = \frac{1}{2}$ n'a pas de solution.
- Le TVI garantit l'**existence** d'une solution, il ne la calcule pas ; la stricte monotonie garantit l'**unicité**.
- Le résultat s'étend à un intervalle quelconque I : si f est continue et strictement monotone sur I et si $0 \in f(I)$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I .

Application 7

1. Montrer que l'équation $x^3 + 2x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$.
2. Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet au moins une solution dans $]0; \frac{\pi}{2}[$.

► Afficher / Masquer la solution

2. Méthode de dichotomie**Méthode — dichotomie**

On suppose que f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$, avec $f(a)f(b) < 0$; on note α l'unique solution de $f(x) = 0$ dans $]a; b[$.

1. On calcule $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (milieu de l'intervalle).
2. Si $f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, alors $\alpha \in \left]a; \frac{a+b}{2}\right[$; sinon $\alpha \in \left[\frac{a+b}{2}; b\right[$.
3. On recommence avec le nouvel intervalle, dont l'amplitude est divisée par 2 à chaque étape.

Application 8

On reprend la solution $\alpha \in]0; 1[$ de l'équation $x^3 + 2x - 1 = 0$ (application 7). Donner un encadrement de α d'amplitude 0,25.

► Afficher / Masquer la solution

VI. Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone**1. Théorème de la bijection****Théorème de la bijection**

On considère une fonction f **continue et strictement monotone** sur un intervalle I et on note $J = f(I)$. Alors, pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une **unique** solution x dans I .

On dit que f réalise une **bijection** de I sur J . La fonction qui à tout $y \in J$ associe l'unique solution $x \in I$ de l'équation $f(x) = y$ est appelée la **fonction réciproque** de f ; elle est notée f^{-1} .

Propriété 10 — caractérisation

Pour tout $x \in I$ et tout $y \in J$:

$$(f^{-1}(y) = x) \iff (f(x) = y).$$

En particulier : $(\forall x \in I) f^{-1}(f(x)) = x$ et $(\forall y \in J) f(f^{-1}(y)) = y$.

Méthode — déterminer $f^{-1}(x)$

Pour $x \in J$, on cherche l'unique $y \in I$ tel que $f(y) = x$: on résout cette équation d'inconnue y en n'oubliant pas la condition $y \in I$, qui permet de choisir la bonne solution.

Exemple 8

On considère la fonction f définie sur $I = [1; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

► Afficher / Masquer la solution

Application 9

On considère la fonction f définie sur $I =]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

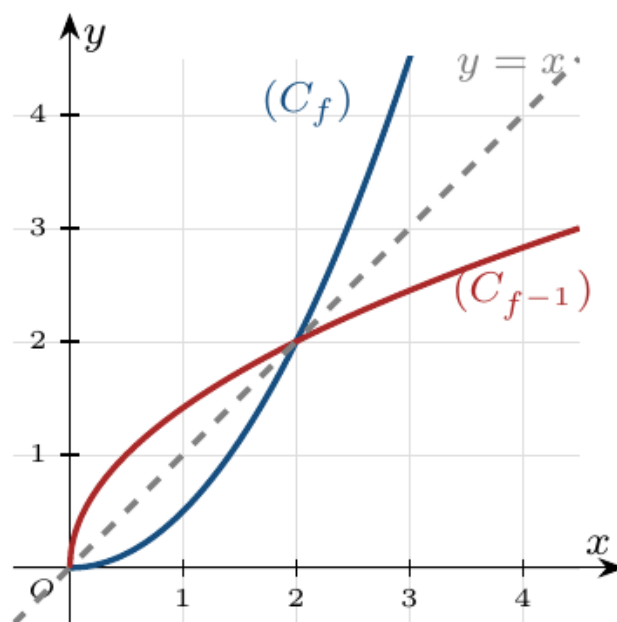
1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
2. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

► Afficher / Masquer la solution

2. Propriétés de la fonction réciproque**Propriété 11**

On considère une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I , et $J = f(I)$. Alors :

- f^{-1} est **continue** sur J ;
- f^{-1} est **strictement monotone** sur J , de **même sens de variation** que f ;
- dans un repère orthonormé, les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont **symétriques** par rapport à la première bissectrice, droite d'équation $y = x$.



Remarque 5

La symétrie par rapport à la droite $(\Delta) : y = x$ échange les points $M(a; b)$ et $M'(b; a)$: si $M \in (C_f)$, c'est-à-dire $b = f(a)$, alors $a = f^{-1}(b)$ et $M' \in (C_{f^{-1}})$.

VII. Racine n -ième et puissances rationnelles**1. La fonction racine n -ième****Activité 2**

On considère un entier $n \geq 2$ et la fonction u définie sur $[0; +\infty[$ par $u(x) = x^n$. Montrer que u admet une fonction réciproque définie sur $[0; +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

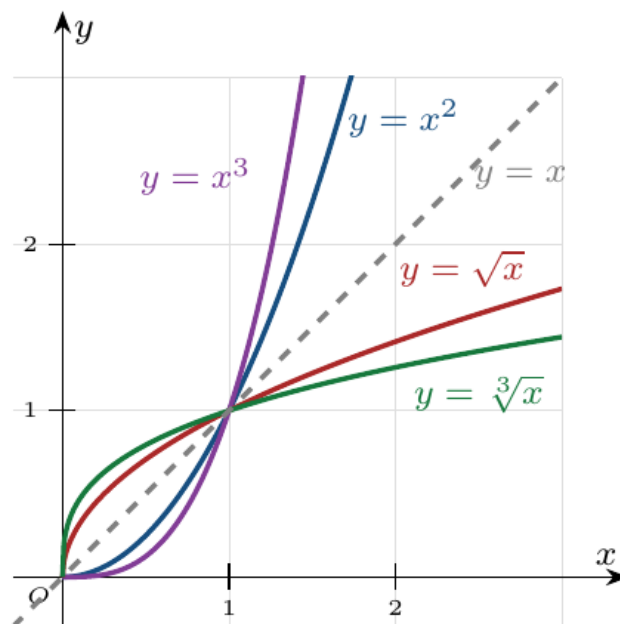
Définition 6 — racine n -ième

On considère un entier $n \geq 2$. La fonction réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0; +\infty[$ est appelée **fonction racine n -ième** ; elle est notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Pour tous réels $x \geq 0$ et $y \geq 0$:

$$\sqrt[n]{x} = y \iff y^n = x.$$

Remarque 6

- $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$; $\sqrt[3]{x}$ se lit « racine cubique de x ».
- Dans ce cours, $\sqrt[n]{x}$ n'est définie **que pour** $x \geq 0$ et l'on a toujours $\sqrt[n]{x} \geq 0$. Par exemple $\sqrt[3]{8} = 2$ et $\sqrt[4]{81} = 3$, tandis que $\sqrt[3]{-8}$ n'est pas défini.
- Pour tout $x \geq 0$: $(\sqrt[n]{x})^n = x$ et $\sqrt[n]{x^n} = x$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$; sa courbe est la symétrique de celle de $x \mapsto x^n$ (pour $x \geq 0$) par rapport à la droite $y = x$.



2. Propriétés et calculs

Propriété 12 — ordre

Pour tous réels $a \geq 0$ et $b \geq 0$ et tout entier $n \geq 2$:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \iff a = b \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \iff a < b.$$

Propriété 13 — calculs

Pour tous réels $a \geq 0$, $b \geq 0$ et tous entiers $n \geq 2$, $p \geq 2$, $m \geq 1$:

Règle	Énoncé
produit	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
quotient ($b > 0$)	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
puissance	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
composition	$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}$
simplification	$\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$

Exemple 9

Calculer $\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{4}$, $\frac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{2}}$ et $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$, puis simplifier $\sqrt[6]{9}$.

► Afficher / Masquer la solution

Méthode — comparer des racines d’indices différents

Pour comparer $\sqrt[n]{a}$ et $\sqrt[p]{b}$, on les écrit avec un même indice N , multiple commun de n et p : $\sqrt[n]{a} = \sqrt[N]{a^{N/n}}$ et $\sqrt[p]{b} = \sqrt[N]{b^{N/p}}$, puis on compare $a^{N/n}$ et $b^{N/p}$.

Application 10

1. Comparer $\sqrt[3]{4}$ et $\sqrt{3}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l’équation $x^3 = 27$, puis l’équation $x^4 = 16$.

► Afficher / Masquer la solution

Propriété 14 — équation $x^n = a$

On considère un réel a et un entier $n \geq 2$.

— n **impair** : si $a \geq 0$, l’équation $x^n = a$ a pour unique solution $\sqrt[n]{a}$; si $a < 0$, elle a pour unique solution $-\sqrt[n]{-a}$.

— n **pair** : si $a > 0$, les solutions sont $\sqrt[n]{a}$ et $-\sqrt[n]{a}$; si $a = 0$, la seule solution est 0 ; si $a < 0$, il n’y a pas de solution.

3. Quantité conjuguée et limites

Propriété 15 — identités utiles

Pour tous réels $a \geq 0$ et $b \geq 0$:

$$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a - b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} \quad (a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0)$$

(car $X^3 - Y^3 = (X - Y)(X^2 + XY + Y^2)$) et, plus généralement, $X^n - Y^n = (X - Y)(X^{n-1} + X^{n-2}Y + \dots + Y^{n-1})$.

Propriété 16 — continuité et limites

On considère un entier $n \geq 2$.

- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.
- Si u est une fonction continue et positive sur un intervalle I , alors $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I .
- Si u est positive au voisinage de x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \ell \geq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{\ell}$; si $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$ (x_0 réel ou infini).

Application 11

Calculer $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x)$.

► Afficher / Masquer la solution

4. Puissances rationnelles

Définition 7 — puissance rationnelle

On considère un réel $a > 0$ et un rationnel $r = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$). On pose

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Propriété 17 — règles de calcul

Pour tous réels $a > 0$, $b > 0$ et tous rationnels r et r' :

$$a^r \times a^{r'} = a^{r+r'} ; \quad \frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'} ; \quad (a^r)^{r'} = a^{rr'} ; \quad (ab)^r = a^r b^r ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} ; \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$

Application 12

Simplifier $A = \frac{8^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[4]{16}}{4^{\frac{3}{2}}}$ et $B = \frac{\sqrt[3]{9} \times \sqrt[6]{3}}{\sqrt{27}}$.

► Afficher / Masquer la solution

Résumé : continuité**À retenir — continuité**

- f continue en x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$; à droite / à gauche : limites en x_0^+ / x_0^- .
- Polynômes, fonctions rationnelles (sur leur domaine), $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\sqrt{}$, $\sqrt[n]{}$ sont continues ; sommes, produits, quotients (dénominateur non nul) et composées de fonctions continues sont continues.
- L'image d'un intervalle (d'un segment) par une fonction continue est un intervalle (un segment).
- **TVI** : f continue sur $[a; b]$ et $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow$ au moins une solution de $f(x) = 0$ dans $]a; b[$; unique si f est de plus strictement monotone.
- **Bijection** : f continue et strictement monotone sur $I \Rightarrow f^{-1}$ existe sur $J = f(I)$, continue, de même monotonie, $(C_{f^{-1}})$ symétrique de (C_f) par rapport à $y = x$.
- **Racine n -ième** ($x, y \geq 0$) : $\sqrt[n]{x} = y \iff y^n = x$; $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ ($a > 0$).